Matemáticas I: Economía (AEEES)

Seminario: Matrices e Determinantes.

1. Matrices.

Definición 1 *Denomínase* matriz *real de orde $m \times n$ a todo conxunto formado por $m \times n$ elementos de $I\!R$ ordeados en m filas e n columnas.*

Denótase por $\mathcal{M}_{m\times n}$ ó conxunto das matrices reais de orde $m \times n$.

Un elemento $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ é da forma:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

onde $a_{ij} \in I\!R$ denota o elemento situado na fila i-ésima e na columna j-ésima de A, $\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$.

Se $m = n$, a matriz chámase *cadrada*.

Os elementos do espacio vectorial $\mathcal{M}_{1\times n}$ chámanse *matrices fila* ou *vectores fila*, e os do espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times 1}$ *matrices columna* ou *vectores columna*.

Dúas matrices $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_{m\times n}$ son iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$.

2. O espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}$

Sexan $A=(a_{ij})\,, B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$, defínese:

-A *suma*: $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$;

-O *producto por escalares*: $\mu A=\mu\,(a_{ij})=(\mu a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}, \mu\in I\!R$.

$\mathcal{M}_{m\times n}$ cá suma e o producto por escalares, así definidos,

é un espacio vectorial de dimensión $m\times n$.

Unha base é $B=\{E_{rs}; r=1,\ldots,m; s=1,\ldots,n\}$, onde E_{rs}

representa a matriz de orde $m\times n$ que ten tódolos

elementos iguais a cero salvo o correspondente á

r-ésima fila e s-ésima columna que é igual a 1.

3. Producto de matrices

Sexan $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$ e $B=(b_{jk})\in\mathcal{M}_{n\times p}$

(observar que o número de columnas de A é igual ó número de filas de B).

Defínese o producto das matrices A e B como unha nova matriz

$C=(c_{ik})\in\mathcal{M}_{m\times p}$ tal que

$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},\ i=1,\ldots,m; k=1,\ldots,p$. É dicir:

$$\begin{array}{ccl} c_{11} & = & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{ik} & = & a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{mp} & = & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\cdots+a_{mn}b_{np} \end{array}$$

Se A_i denota a fila i-ésima de A e B^j a columna j-ésima de B,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \left(B^1, \ldots, B^p\right) = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & \ldots & A_1 B^p \\ \vdots & & \vdots \\ A_m B^1 & \ldots & A_m B^p \end{pmatrix}.$$

Nótese que o producto de matrices non é unha operación interna (a excepción do caso de matrices cadradas), senón que interveñen, en xeral, tres espacios $(\mathcal{M}_{m\times n}, \mathcal{M}_{n\times p}, \mathcal{M}_{m\times p})$. Nótese tamén que o producto de matrices non é conmutativo; é máis, pode existir AB sen que exista BA. (Ver exercicio proposto 1b)

4. Algúns tipos de matrices

- **Matriz trasposta:** Dada unha matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, chámase *matriz trasposta* de A á matriz que se obtén de A cambiando filas por columnas. Denótase por A^t.

  Obsérvese que: $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $(A^t)^t = A$, $(A+B)^t = A^t + B^t$ e $(AB)^t = B^t A^t$.

- **Matriz simétrica:** Unha matriz cadrada é *simétrica* se $A^t = A$.

- **Matriz diagonal:** Unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ é *diagonal* se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

  Denótase por $A =$diag$(a_1, \ldots, a_n)$, onde $a_i = a_{ii}$.

O conxunto das matrices diagonales de orde $n \times n$ é un subespacio vectorial de dimensión n de $\mathcal{M}_{n\times n}$.

- **Matriz identidade:** É a matriz diagonal con $a_{ii} = 1$ para todo i. Denótase por I.

- **Matriz triangular:** É toda matriz cadrada tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ (*triangular superior*), ou ben $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$ (*triangular inferior*).

  Nótese que as matrices diagonais son triangulares superiores e inferiores. O conxunto das matrices triangulares superiores (inferiores) de orde $n \times n$ é un subespacio vectorial de dimensión $n(n+1)/2$ de $\mathcal{M}_{n\times n}$.

- **Matriz inversa:** Dada unha matriz cadrada A, dícese que A^{-1} é a matriz inversa de A se: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

  A matriz inversa non sempre existe. No caso de existir é única.

  Observar que: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, sempre que existan A^{-1} e B^{-1}.

5. Determinantes

Sexa $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ unha matriz cadrada de orde $n \times n$, definimos o *determinante de* A, $\det A$, por recurrencia:

Se $n = 1$, $A = (a)$, $\det A := a$.

Se $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

En xeral, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n},$$

chámase *menor complementario de* a_{ij}, Δ_{ij}, ó determinante da matriz de orde $n-1$ que se obtén de A ó suprimir a fila i-ésima e a columna j-ésima.

E chámase *adxunto de* a_{ij} ó número real $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Defínese

$$\det A := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Exemplo 1 **Regra de Sarrus:** Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}$, temos que

$$A_{11} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Así que

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Propiedades

1. O determinante dunha matriz pode desenrolarse por calquera fila (columna).
2. A aplicación $\det\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to I\!R$ é unha función lineal das súas filas (columnas).

3. Ó intercambiar dúas filas (columnas) dunha matriz o seu determinante cambia de signo.
4. O determinante dunha matriz con dúas filas (columnas) iguais é nulo.
5. O determinante dunha matriz é nulo se e só se as súas filas (columnas) son linealmente dependentes.
6. O determinante dunha matriz non varía ó sumar a unha fila (columna) unha combinación lineal das restantes. Como consecuencia, pódese fixar unha fila (columna) e sumar ás restantes múltiplos adecuados da que está fixa, de modo que aparezcan ceros, facendo así máis sinxelo o cálculo do determinante.
7. O determinante dunha matriz coincide có da súa trasposta.
8. O determinante do producto de dúas matrices é o producto dos seus determinantes.

6. Cálculo da matriz inversa

Dada unha matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Calcúlase o seu determinante.

Se $\det A = 0$, entón A non ten inversa.

No caso contrario, para calcular a inversa de A:

1. Calcúlase a matriz trasposta A^t.

2. Calcúlanse os adxuntos da matriz trasposta A^t_{ij}, para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

3. A inversa de A, será
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^t_{ij}\right).$$

7. Rango dunha matriz

Chámase *menor de orden* k dunha matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ó determinante da matriz cadrada $k \times k$ formada polos elementos que pertencen a k filas e a k columnas da matriz A.

O *rango dunha matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ é a orde do maior menor non nulo de A.

Xa que logo, se o rango de A é k, todos os menores de A de orde superior a k son nulos.

Observar que se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, o rango de A é menor ou igual que m e que n.

Exemplo 2 1. Sexa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. O rango de A é menor ou igual que 3.

Para estudar o rango de A, comezamos estudando os menores de orde 3.

Como

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$

temos que $\text{rango}(A) = 3$.

2. Sexa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

O rango de A é menor ou igual que 3.

Para estudar o rango de A, comezamos estudando os menores de orde 3.

Como

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

o rango de A non é 3.

Vexamos se é 2.

Como $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$ xa temos que $\text{rango}(A) = 2$.

8. Cuestións Propostas.

1. O producto dunha matriz fila $1 \times n$ por unha matriz columna $n \times 1$ (nesa orde):

   a) é un número real. b) é unha matriz $1 \times n$.
   c) é unha matriz $n \times n$. d) non se pode efectuar.

2. No producto de matrices, a propiedade $AB = BA$ é:

   a) verdadeira só cando as matrices son cadradas.
   b) falsa sempre. c) verdadeira sempre. d) falsa en xeral.

3. Para que unha matriz A sexa inversible é necesario que sexa:

   a) a matriz identidade. b) a matriz nula.
   c) unha matriz cadrada. d) unha matriz simétrica.

4. Para que unha matriz A sexa inversible é suficiente que:

   a) A sexa cadrada. b) A sexa unha matriz diagonal.
   c) A sexa cadrada e con columnas linealmente independentes. d) A sexa simétrica.

5. Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, a matriz $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é:

   a) a simétrica de A. b) a trasposta de A.
   c) a inversa de A. d) a adxunta de A.

6. Sexa $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Se existe A^{-1}, pódese asegurar que:

   a) $n < m$. b) $m < n$. c) $m = n$ e $\det A = 0$. d) $m = n$ e $\text{rango}(A) = n$.

7. O rango da matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é

   a) 0. b) 1. c) 2. d) 3.

8. Para que valores de $x \in I\!R$ o rango da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ é 3?

   a) $x = 0$. b) $x \neq -\frac{1}{2}$. c) $x = \frac{1}{2}$. d) Para ningún dos anteriores.

9. O rango da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ é

   a) 0. b) 1. c) 2. d) 3.

10. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, a matriz producto AB é

a) $AB = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 14 & -7 \end{pmatrix}$. b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$. c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}$.

d) Ningunha das anteriores.

11. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, a matriz B que verifica que $2A + B = 5I$ é

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$. c) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Ningunha das anteriores.

12. Se $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, a primeira fila da matriz B^3 é

a) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 7 & 20 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 6 & 17 \end{pmatrix}$. d) Ningunha das anteriores.

13. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, a matriz C que verifica que $AB = C$ é

a) $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -5 \\ -2 & 10 & -8 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. b) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -2 & 10 & -8 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. c) $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -7 \\ -2 & 10 & -8 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Ningunha das anteriores.

14. A segunda fila da matriz B que verifica que $BD = 2C$, sendo $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

e $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é

a) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 16 & 10 & 12 \end{pmatrix}$. d) Ningunha das anteriores.

9. Exercicios Propostos.

1. Para as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

   $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   resposta razoadamente ás seguintes preguntas:

   a) Calcula, se é posible: A^t, M^t, N^t, A^{-1}, M^{-1}, N^{-1}, $A + M^t$, $A^t - M$.

   b) Calcula, se é posible, os seguintes productos:

   $$A \cdot M, \quad A \cdot N, \quad M \cdot A, \quad M \cdot N, \quad N \cdot A, \quad N \cdot M, \quad A \cdot M \cdot N, \quad M \cdot N \cdot A.$$

   Cando exista o producto, razoa que tamaño ten a matriz producto resultante antes de calculala.

   c) Calcula, cando sexa posible, o determinante das matrices anteriores e indica cales son inversibles e por que.

2. Dadas as matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   calcula: a) $2A - 3B$. b) $(CD)^t - A^2$. c) $(3A - I_3)(I_3 - B)$.

   d) $AB - BA$. e) ABA.

3. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcula AB e BA.

4. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $(A + B)(A - B)$. b) $A^2 - B^2$. c) $(A + B)^2$. d) $A^2 + 2AB + B^2$.

   ¿Por que as respostas dos apartados a) e b) non coinciden? ¿E as de c) e d)?

5. Dadas as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular AB e AC. Observade que $AB = AC$, pero $B \neq C$;

¿que conclusión pódese sacar disto?

6. Mediante operacións elementais por filas, transformade as seguintes matrices en triangulais superiores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Calcular o valor dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8. Sexan $A, B \in \mathcal{M}_4$ tales que $|A| = 3$ e $|B| = -2$. Calcular:

a) $|2A|$. b) $|\frac{1}{2}B|$. c) $|-B|$. d) $|BA^t|$.

e) $|(B^2A)^t|$. f) $|(B^tA^tB)^t|$.

9. Comprobade, sen necesidade de calcular o seu valor, que

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ son nulos.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 10 & 20 & -5 \\ 2 & 8 & -4 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 10.