Matemáticas I: Economía

TEMA 3: Sistemas de ecuacións lineais.

1. **Formas matricial e funcional.**

2. **Teorema de Rouché-Fröbenius.**

3. **Sistemas de Cramer.**

4. **Método de Gauss.**
   Aplicación ó cálculo da inversa.

Introducción

Na maioría dos modelos matemáticos utilizados polos economistas acaba por aparecer un sistema de ecuacións lineais que hai que resolver.

A análise input-output é unha área destacada da economía que usa os sistemas de ecuacións lineais. Modelos como os baseados no traballo pioneiro de Wassily Leontief *The Structure of American Economy, 1919-1939* dan lugar a sistema de centos de ecuacións que conteñen centos de incógnitas. Este modelo, e noutros semellantes desenrolados na antigua Unión Soviética por Leonid Kantorivich, tiñan coma obxetivo planificar a producción de equipamento militar e outros suministros durante a Segunda Guerra Mundial.

Para comprender estes enormes sistemas de ecuacións é necesario botar man de conceptos como vectores, matrices e determinantes, que xa vimos nos temas anteriores e que polo tanto estamos en disposición de utilizar.

1. Formas matricial e funcional.

Definición 1 *Un sistema de m ecuacións lineais (en $\mathbb{R}$) con n incógnitas é unha expresión do tipo:*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, n$ *e* $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, m$

Observación 1 *Tamén pódese escribir en forma matricial,* $AX = B$, *con* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ *e* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$; *denominadas* **matriz de coeficientes do sistema**, **matriz incógnita do sistema** *e* **matriz dos termos independentes do sistema**, *respectivamente.*

Neste caso unha solución do sistema será un $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ *que verifique* $A\Delta = B$

Observación 2 *Denotando por* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *á aplicación lineal definida pola matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, *o sistema anterior pódese expresar tamén mediante* $f(x) = b$, *con* $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

Neste caso unha solución do mesmo será un $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *que verifique* $f(\alpha) = b$.

Clasificación dos sistemas de ecuacións lineais

Dependendo de que o sistema teña ou non solución, o sistema denomínase **compatible** (se ten solución) ou **incompatible** (se non ten solución). Se o sistema é compatible, dependendo do número de solucións, o sistema denomínase **determinado** (solución única) ou **indeterminado** (infinitas solucións).

Se $B = \theta$ o sistema denomínase **homoxéneo**, e se $B \neq \theta$ **non homoxéneo**.

Observación 3 *Os sistemas homoxéneos son sempre compatibles (sempre teñen a lo menos a solución trivial, $x_j = 0,\ \forall j = 1, \ldots, n$), pero poden ser determinados (a única solución é a trivial) ou indeterminados (teñen máis solucións que a trivial).*

Conxunto de solucións dun sistema de ecuacións lineais

O sistema $AX = B$, ou $f(x) = b$, será compatible (terá solución) se, e só se, $B \in < \{A^1, A^2, \cdots, A^n\} >$, ou ben $b \in \operatorname{Im} f$; sendo $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, con $1 \leq j \leq n$.

Observación 4 *Se o sistema é homoxéneo, $AX = \theta$ ou $f(x) = \theta$, seu conxunto de solucións será o núcleo de f, $S_H = \ker f$, e polo tanto subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*
Se o sistema non é homoxéneo, pero é compatible, $S = \{\alpha + u : u \in \ker f\}$, *sendo $f(\alpha) = b$ (α é unha solución do sistema). Neste caso S non é subespacio vectorial. Nótese que S terá tantos elementos como* $\ker f$ *(ou só un, ou ben infinitos elementos).*

2. Teorema de Rouchè-Fröbenius

Teorema 1 *Un sistema de m ecuacións lineais con n incógnitas, $AX = B$, ten solución se, e só se, $Rg(A) = Rg(A|B)$, sendo $(A|B) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}$ a matriz ampliada do sistema (tódalas columnas de A e por último a columna dos termos independentes).*

Ademáis, se $Rg(A) = Rg(A|B)$, verifícase:

Se $Rg(A) = n$, o sistema é compatible determinado (solución única).

Se $Rg(A) = r < n$, o sistema é compatible indeterminado (infinitas solucións).

Demostración: Se $f(x) = b$ é a expresión funcional do sistema $AX = B$, $Rg(A) = Rg(A|B)$ equivale a que $b \in \operatorname{Im} f$, e polo tanto a que o sistema teña solución; o que proba a primeira parte.

Ademáis, se $Rg(A) = Rg(A|B) = n$, os vectores columna de A son linealmente independentes, e polo tanto o modo de obter B como combinación lineal deles é única (solución única para o sistema); mentras que se $Rg(A) = r < n$ entón $\dim \operatorname{Im} f = r$, polo que $\ker f \neq \{\theta\}$ e o conxunto $S = \{\alpha + u : u \in \ker f\}$ de solucións do sistema terá infinitos elementos.

Exemplo 1 *Estudiar para que valores de "a" o sistema* $\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax & + & y & + & z & = 1 \\ x & + & ay & + & z & = a \\ x & + & y & + & az & = a^2 \end{array}\right.$

ten solución e para cales non a ten, para cales a solución é única e para cales ten infinitas solucións.

Solución: Dado que $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = a^3 + 2 - 3a = (a-1)^2(a+2)$.

Se $a \neq 1$ e $a \neq -2$, $\det(A) \neq 0$; e polo tanto $\mathrm{Rg}(A) = 3 = \mathrm{Rg}(A|B)$. Nestes casos o sistema ten solución; como ademáis o rango coincide có número de incógnitas a solución é única.

Se $a = 1$, $\mathrm{Rg}(A|B) = \mathrm{Rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = 1 < 3 = n^{\underline{o}}$ incógnitas. Neste caso o sistema ten infinitas solucións.

Se $a=-2$, $\text{Rg}(A)=\text{Rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}=2$, posto que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$; mentras que $\text{Rg}(A|B)=3$, xa que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=9\neq 0$. Neste caso o sistema non ten solución.

3. Sistemas de Cramer

Definición 2 *Un sistema de ecuacións lineais, $AX=B$, é de Cramer se $A\in\mathcal{M}_{n\times n}$ e $Rg(A)=n$.*

Teorema 2 *Todo sistema de Cramer é compatible e determinado.*

Regra de Cramer: Sexan $AX=B$ un sistema de Cramer, e α a súa única solución, $\alpha=A^{-1}B$.

Como $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)^t=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, sendo A_{ij} o adxunto de a_{ij};

$$\alpha=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Polo tanto, $\alpha_1=\dfrac{1}{\det A}[b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}]=\dfrac{1}{\det A}\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\alpha_2=\frac{1}{\det A}[b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2}]=\frac{1}{\det A}\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En xeral, $\alpha_i=\dfrac{1}{\det A}[b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni}]=\dfrac{1}{\det A}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots a_{ni-1} & b_n & \dots a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Exemplo 2 *Dado o sistema* $\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & y & - & 2z & =-2 \\ -x & + & y & + & z & =0 \\ x & - & 2y & + & z & =8 \end{array}\right.$

comproba que é un sistema de Cramer e obtén a súa solución, aplicando a regra de Cramer.

Solución: En efecto o sistema é de Cramer posto que $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, e polo tanto $\text{Rg}(A) = 3 = n^{\underline{o}}$ incógnitas. A solución será

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

4. Método de Gauss

Sistemas equivalentes.

Definición 3 *Dous sistemas de ecuacions lineais son equivalentes se teñen as mesmas solucións.*

Poden obterse sistemas equivalentes a un dado mediante:

1) Cambiando a orde das ecuacións.

2) Multiplicando unha das ecuacións por un número real distinto de cero.

3) Eliminando unha ecuación que sexa combinación lineal das restantes.

4) Sumando a unha ecuación unha combinación lineal das restantes.

Método de Gauss: Consiste en transformar o sistema de partida en outro equivalente a él pero máis fácil de resolver, utilizando a matriz ampliada do sistema.

Para o sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$, o método de Gauss consiste en ir transformándoo en sistemas equivalentes, utilizando a matriz ampliada, do seguinte modo:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \underset{\text{se } a_{11} \neq 0}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \alpha_m \end{array} \right) \underset{\text{se } \alpha_{22} \neq 0}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \dots & \beta_{3n} & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{m3} & \dots & \beta_{mn} & \beta_m \end{array} \right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \dots & \alpha_{2n} & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \dots & \dots & \beta_{3n} & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_{rr} & \dots & \delta_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{r+1} \end{array} \right)$$

Se $\gamma_{r+1} \neq 0$, o sistema é incompatible, pois $Rg(A|B) > Rg(A)$.

Se $\gamma_{r+1} = 0$, o sistema é compatible, pois $Rg(A|B) = Rg(A)$; e, neste caso, se $r = n$ o sistema ten solución única (de $\delta_{nn}x_n = \delta_n$ obtense o valor de x_n; con ese valor de x_n e a ecuación anterior, obtense o valor de x_{n-1} e así sucesivamente).

Se $r < n$, pásanse ó 2^o membro $x_{r+1}, \cdots, x_n$, e calcúlanse $x_1, \cdots, x_r$ en función de $x_{r+1}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ (infinitas solucións).

Exemplo 3 *Resolver, utilizando o método de Gauss, o sistema* $\left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & z & = 0 \\ 2x & + & 4y & - & z & = 1 \\ 3x & + & 6y & & & = 1 \end{array} \right.$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ \sim \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \underset{F_3 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

O sistema equivalente é $\left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & z & = 0 \\ & & & - & 3z & = 1 \end{array} \right.$. As solucións son $S = \{(\frac{1}{3} - 2y, y, -\frac{1}{3}) : y \in \mathbb{R}\}$

Aplicación do método de Gauss ó cálculo de A^{-1}

Sexa $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ unha matriz inversible ($\exists\ A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$).

Denótanse por $A_1, \cdots, A_n$ as filas de A e por $C^1, \cdots, C^n$ as columnas de A^{-1}. Dado que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & C^2 & \dots & C^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1C^1 & A_1C^2 & \dots & A_1C^n \\ A_2C^1 & A_2C^2 & \dots & A_2C^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_nC^1 & A_nC^2 & \dots & A_nC^n \end{pmatrix}$$

e por outra parte $AA^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, obtense que $A_iC^j = \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{array} \right.$,

ou ben $AC^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AC^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad AC^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Polo que cada columna, C^j, de A^{-1} pódese considerar como a solución (única) do sistema $AX = E^j$, sendo E^j a matriz columna de coordenadas do j-ésimo elemento da base canónica.

Como todos eses sistemas teñen a mesma matriz de coeficientes, pódense resolver conxuntamente utilizando o método de Gauss.

Exemplo 4 *Calcular a inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, utilizando o método de Gauss.*

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 + F_2}{\overset{-F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 + 1/2F_3}{\overset{1/2F_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \underset{F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Polo tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercicio 1 *Obtén para cada caso a matriz inversa. (Usa-lo método de Gauss).*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\qquad C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ -2 & -13 & 2 & 8 \\ 1 & 11 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercicio 2 *Estudiar para que valores de "a" e "b" o sistema* $\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax & + & by & + & z & = 0 \\ x & + & aby & + & z & = 0 \\ x & + & by & + & az & = 0 \end{array}\right.$ *ten solución e para cales non a ten, para cales a solución é única e para cales ten infinitas solucións.*

Solución: O sistema sempre ten solución, posto que é homoxéneo.

Ademáis, como $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a^3b + 2b - 3ab = b(a^3 - 3a + 2) =$

$= b(a-1)^2(a+2)$, se $b \neq 0$, $a \neq 1$ e $a \neq -2$, a solución do sistema é única.

Noutro caso o sistema ten infinitas solucións.

Exercicio 3 *Estudiar para que valores de "a" e "b" o sistema* $\left\{\begin{array}{rcrl} 3x & - & 7y & = a \\ x & + & y & = b \\ 5x & - & 13y & = 5a-2b \\ x & + & 2y & = a+b+1 \end{array}\right.$ *ten solución e para cales non a ten, para cales a solución é única e para cales ten infinitas solucións.*

Solución: Como $\left(\begin{array}{rr|l} 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & -13 & 5a-2b \\ 1 & 2 & a+b+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & b \\ 0 & -10 & a-3b \\ 0 & -18 & 5a-7b \\ 0 & 1 & a+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 11a-3b+10 \\ 0 & 0 & 23a-7b+18 \end{array}\right)$

o sistema de partida só terá solución, e ademáis única, se a e b son solución do sistema $\left\{\begin{array}{l} 11a-3b+10=0 \\ 23a-7b+18=0 \end{array}\right.$; ou sexa se

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -3 \\ -18 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 23 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{70-54}{-8} = -2; \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 23 & -18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 23 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-198+230}{-8} = -4.$$

Exercicio 4 *Estudiar para que valores de "a" e "b" o sistema* $\left\{\begin{array}{rcrl} 3x & - & 7y & = a \\ x & + & y & = b \\ 5x & - & 13y & = 5a-2b \\ x & + & 2y & = a+b-1 \end{array}\right.$ *ten solución e para cales non a ten, para cales a solución é única e para cales ten infinitas solucións.*

Solución: Como $\left(\begin{array}{rr|l} 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & -13 & 5a-2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & b \\ 0 & -10 & a-3b \\ 0 & -18 & 5a-7b \\ 0 & 1 & a-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 11a-3b-10 \\ 0 & 0 & 23a-7b-18 \end{array}\right)$

o sistema de partida só terá solución, e ademáis única, se a e b son solución do sistema $\left\{\begin{array}{l} 11a-3b-10=0 \\ 23a-7b-18=0 \end{array}\right.$; ou sexa se

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 18 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 23 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-70+54}{-8} = 2; \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 23 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 23 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{198-230}{-8} = 4.$$

Exercicio 5 *Para o sistema* $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& a \\ ax-by+z &=& 0 \\ bx-ay+z &=& ab \end{array}\right.$ *, ¿cal das seguintes afirmacións é* **FALSA***?*

a) Se $a=0$ *o sistema é compatible.*
b) Se $a=2$ *e* $b=3$ *o sistema é compatible determinado.*
c) Se $a=b\neq 0$ *o sistema é incompatible.*
d) Se $a=-b=1$ *o sistema é compatible indeterminado.*

Solución: Como $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & -b & 1 & 0 \\ b & -a & 1 & ab \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -b-a & 1-a & -a^2 \\ 0 & -a-b & 1-b & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+b & a-1 & a^2 \\ 0 & 0 & a-b & a^2 \end{array}\right)$

se $a\neq b$ e $a\neq -b$ o sistema ten solución única (resposta b) correcta).

Se $a=b$ queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2b & b-1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \end{array}\right)$, e polo tanto se $a=b=0$ o sistema ten infinitas solucións (resposta a) correcta), pero se $a=b\neq 0$ o sistema é incompatible (resposta c) correcta).

Se $a=-b$ queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -b \\ 0 & 0 & -b-1 & b^2 \\ 0 & 0 & -2b & b^2 \end{array}\right)$ polo que $\mathrm{Rg}(A)=2$ e o sistema non poderá ter solución única.

Agora ben, como $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -b \\ 0 & -b-1 & b^2 \\ 0 & -2b & b^2 \end{array}\right| = b^2(b-1)$, se $a=-b=0$ ou $a=-b=-1$ o sistema

é compatible indeterminado, pero se $a=-b\neq -1$ o sistema é incompatible

(resposta d) falsa).

Exercicio 6 *Resolver, utilizando o método de Gauss, os seguintes sistemas:*

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x &+& 2y &+& z &=0 \\ 2x &+& 4y &-& z &=1 \\ && y &-& 3z &=1 \end{array}\right.$

Solución: Como $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$ o sistema equivalente é $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & z & = 0 \\ & & y & - & 3z & = 1 \\ & & & - & 3z & = 1 \end{array}\right.$, e a súa solución: $z = -\frac{1}{3}$, $y = 0$, $x = -z = \frac{1}{3}$.

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 3 \\ 2x & - & y & - & z & = 0 \\ & & & & 3x & = 5 \end{array}\right.$

Solución: Como $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$

o que da lugar a un sistema equivalente que é incompatible, non ten solución.

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 2z & + & 3t & = 0 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & + & 5t & = -2 \\ -x & + & y & & & - & t & = 1 \\ & & & & 2z & + & 2t & = 1 \\ -2x & + & 2y & + & 2z & & & = 3 \end{array}\right.$

Solución: Como $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

o que da lugar ó sistema equivalente $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2z & = & y - 3t \\ 2z & = & 1 - 2t \end{array}\right.$, que ten por solución:

$$x = y - t - 1, \qquad z = -t + \frac{1}{2}, \qquad y,\ t \in \mathbb{R}$$

Problemas Propostos.

1. Nun mercado de competencia perfecta considéranse dous bens: A e B, que teñen prezos unitarios en euros p_A e p_B, respectivamente. Sabendo que as funcións de oferta e demanda do ben A son $S_A = 5 + 2p_A - p_B$, $D_A = 3 - 6p_A + 5p_B$, e as do ben B son $S_B = 3 - 2p_A + 4p_B$, $D_B = 14 + 3p_A - p_B$; calcular os prezos unitarios de cada ben para que o mercado estea en equilibrio.

2. Consideremos unha economía dividida nun sector agrícola (A) e un sector industrial (I). Para producir unha unidade de A necesítase 1/6 de unidade de A e 1/4 de unidade de I. Para producir unha unidade de I necesítase 1/4 de unidade de A e 1/4 de unidade de I. Se as demandas finais en cada un dos dous sectores é de 60 unidades,

   a) escribe o sistema de Leontief para esta economía.

   b) calcula o número de unidades que hai que producir en cada sector para cubrir as demandas finais.

3. Consideremos un modelo input-ouput con 3 sectores. O sector 1 é industria pesada, o sector 2 é industria lixeira e o sector 3 é agricultura. Supoñamos que os requerimentos de input están dados pola seguinte táboa:

	Industria pesada	Industria lixeira	Agricultura
Unidades de bens de industria pesada	$a_{11} = 0{,}1$	$a_{12} = 0{,}2$	$a_{12} = 0{,}1$
Unidades de bens de industria lixeira	$a_{21} = 0{,}3$	$a_{22} = 0{,}2$	$a_{23} = 0{,}2$
Unidades de bens agrícolas	$a_{31} = 0{,}2$	$a_{32} = 0{,}2$	$a_{33} = 0{,}1$

   Supoñamos que as demandas finais dos tres bens son de 85, 95 e 20 unidades, respectivamente. Se x_1, x_2 e x_3 denotan o número de unidades que hai que producir en cada sector, escribe o modelo de Leontief para o problema. Comproba que $x_1 = 150$, $x_2 = 200$ e $x_3 = 100$ é unha solución. ¿Ten máis solucións? Razoa a resposta.

4. A condición de equilibrio para o prezo de 3 bens dun mercado relacionados entre si da lugar ó seguinte sistema de ecuacións lineais: $\left.\begin{array}{rcl} p_1 + p_2 + p_3 &=& 6 \\ p_1 + p_2 - p_3 &=& 0 \\ 2p_1 - p_2 + p_3 &=& 3 \end{array}\right\}$, sendo p_1, p_2 e p_3 os prezos dos 3 productos. Calcular os prezos de equilibrio.

5. Nunha economía hai 3 sectores productivos: A, B e C. Na seguinte táboa dase a cantidade de producto de cada sector necesaria para producir unha unidade de producto dos outros sectores e del mesmo. Sabendo que a demanda final é de 1200 unidades do producto do sector A, 3400 do sector B e 140 do sector C, calcular a producción que debe alcanzar cada sector para satisfacer estas demandas.

	Sector A	Sector B	Sector C
Sector A	0,6	0	0,3
Sector B	0,4	0,2	0,6
Sector C	0	0,3	0,6

Cuestións Propostas.

1. Dado o sistema $AX = \theta$, con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, podemos asegurar que:

   a) O seu conxunto de solucións é $\{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = \theta\}$, sendo f a aplicación lineal definida por A.

   b) O seu conxunto de solucións é o conxunto baleiro.

   c) Sempre ten unha única solución. d) Sempre ten infinitas solucións.

2. Para o sistema $AX = B$, o teorema de Rouché-Frobenius asegura que:

   a) O sistema é homoxéneo se o término independente é o vector cero.

   b) O sistema é compatible se ten solución, e incompatible se non a ten.

   c) O sistema é compatible se, e só se, $rg(A) = rg(A|B)$, sendo $(A|B)$ a matriz ampliada do sistema.

   d) Se $B = \theta$, o conxunto de solucións do sistema é o núcleo da aplicación lineal definida por A.

3. Se $AX = \theta$ é un sistema de Cramer, entón:

   a) É incompatible. b) É compatible indeterminado. c) A única solución é $X = \theta$.

   d) É compatible pero non hai datos para saber se é determinado ou indeterminado.

4. ¿Cal das seguintes afirmacións é **FALSA**?

   a) Todo sistema homoxéneo ten solución única.

   b) Se $AX = B$ é un sistema de Cramer, entón $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|B) =$ número de incógnitas.

   c) Se $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|B) <$ número de incógnitas, entón o sistema é compatible indeterminado.

   d) Se un sistema é de Cramer e homoxéneo, a única solución que ten é o vector cero.

5. ¿Cal das seguintes afirmacións é **FALSA**?

a) Un sistema homoxéneo é sempre compatible. b) As solucións dun sistema forman un espacio vectorial.

c) Un sistema homoxéneo pode ser indeterminado. d) $(0,0)$ é a única solución do sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right.$.

6. Sexa $AX = B$ un sistema compatible de m ecuacións e n incógnitas. $AX = B$ ten solución única se:

   a) $\mathrm{Rg}(A) = m$. b) $\mathrm{Rg}(A) < m$. c) $\mathrm{Rg}(A) = n$. d) $\mathrm{Rg}(A) < n$.

7. Se $AX = B$, é un sistema de m ecuacións e n incógnitas e $m < n$, entón pódese afirmar que:

   a) O sistema é incompatible. b) O sistema non é compatible determinado.
   c) O sistema é compatible indeterminado. d) Ningunha das respostas anteriores é correcta.

8. O sistema $\left\{\begin{array}{ll} ax+by & =0 \\ bx+ay & =0 \end{array}\right.$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0, a \neq b$ verifica:

   a) É compatible determinado. b) É compatible indeterminado.
   c) É incompatible. d) Ningunha das respostas anteriores é correcta.

9. O sistema $\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & -z & =0 \\ & y & -z & =0 \\ x & & +z & =0 \end{array}\right.$ verifica:

   a) É incompatible, porque é homoxéneo. b) É compatible, porque é homoxéneo.
   c) Non é homoxéneo. d) Ten soamente tres solucións: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

10. Sobre o sistema $\left\{\begin{array}{r} x+y=1 \\ -x-y=-1 \end{array}\right.$ pódese asegurar que:

a) Non é un sistema, porque as dúas ecuacións son a mesma.

b) É un sistema compatible determinado, porque ten só dúas solucións distintas.

c) É un sistema compatible indeterminado.

d) É un sistema incompatible, porque a solución, se existe, é única.

11. Se $AX = B$ é un sistema de n ecuacións e n incógnitas, verifícase:

a) É de Cramer e ten solución única. b) É compatible con unha ou máis solucións dependendo do $rg(A)$.

c) No caso de ser compatible ten n solucións. d) Ningunha das respostas anteriores é correcta.

12. Se $AX = B$ é un sistema homoxéneo de m ecuaciones e n incógnitas, verifícase:

a) A única solución do sistema é a trivial. b) É un sistema compatible e se $n = m$ ten solución única.

c) É un sistema compatible, pois o vector cero é solución. d) Ningunha das respostas anteriores é correcta.

13. Se $AX = B$ é un sistema de ecuacións lineais tal que $\operatorname{Rg} A \neq \operatorname{Rg}(A|B)$, entón:

a) O conxunto de solucións do sistema é un subespacio vectorial. b) O sistema non ten solución.

c) O sistema ten solución única. d) O sistema ten infinitas solucións.

14. O sistema $\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y & =13 \\ -x+y & =1 \end{array}\right.$ verifica:

a) Ten dúas solucións, $x = 2$ e $y = 3$. b) Ten infinitas solucións, entre elas $x = 2$, $y = 3$.

c) É incompatible. d) Ten solución única.

15. ¿Para que valores de r podería ser $A = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ unha matriz de cambio de base?

a) $r = 0$. b) $r \neq 0$. c) $\forall\, r \in \mathbb{R}$ d) Para ningún $r \in \mathbb{R}$.

16. O sistema $AX = \theta$, con A a matriz do exercicio anterior, verifica:

a) Ten solución única calquera que sexa r. b) Ten solución única só se $r \neq 0$.

c) Non ten solución se $r = 0$. d) Ten infinitas solucións calquera que sexa r.

17. Dado o sistema $\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$, ¿para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o sistema ten solución única?

a) Sempre, porque é homoxéneo. b) Sempre que $a \neq 1$ e $a \neq -3$. c) Se $a = -3$. d) Só se $a = 1$.

18. ¿Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o sistema do exercicio anterior ten infinitas solucións?

a) Sempre, pois é homoxéneo. b) Sempre que $a \neq 1$ e $a \neq -3$. c) Se $a = -3$ ou $a = 1$. d) Só se $a = 1$.

Exercicios Propostos.

1. Discute e resolve os seguintes sistemas para tódolos posibles valores reais de a e b.

$$\left\{\begin{array}{rl} 3x-y+2z & =1 \\ x+4y+z & =b \\ 2x-5y+az & =-2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} ax+y & =1 \\ x+az & =0 \\ ay+z & =b \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} ax+y & =b \\ 2y+z & =a \\ ax-z & =2b \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rl} x-y & =a \\ 2ax+z & =b \\ ax+ay+z & =3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x+ay+az & =3 \\ x+z & =2 \\ ax+(a+1)y-z & =b \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rl} x-y+3z & =1 \\ 2ay-2z+6t & =2 \\ z-3t & =-1 \\ 3z-at & =a+1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} ax+by+z & =1 \\ x+aby+z & =b \\ x+by+az & =1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rl} x+y-az & =b \\ ax+y-z & =1 \\ y+3z & =a+b \end{array}\right.$$

Apéndice: Modelos de Leontief

En xeral, o **modelo de Leontief** describe unha economía de n industrias entrelazadas, cada unha delas produce un único ben utilizando só un proceso de producción.
Cada industria debe usar, para producir o seu ben, materias primas procedentes das outras.
Por exemplo, a industria do aceiro necesita productos da industria do carbón e de outras moitas.
Ademáis de suministrar o seu propio producto a outras industrias que o necesiten, cada industria debe facer fronte á demanda externa do seu producto que provén de clientes, gobernos, etc.
A cantidade de producción que se necesita para cubrir a demanda externa chámase **demanda final**.

Designemos por: x_i ó nº total de unidades do ben i que vai producir a industria i nun certo ano.

a_{ij} ó número de unidades do ben i que se necesitan para producir cada unidade do ben j.

Supoñemos que as necesidades de materias primas son directamente proporcionais á producción, polo

que $a_{ij}x_j$ será o número de unidades do ben i que se necesitan para producir x_j unidades do ben j.

Para que se poda dar unha producción $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, a industria i necesita suministrar un total de

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

unidades do ben i. Se queremos que a industria i suministre ademáis b_i unidades para cubrir a demanda global, entón o equilibrio entre oferta e demanda exixe que

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + b_i$$

Esto deberá verificarse para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, polo que teremos o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

Pasando á esquerda tódolos termos con incógnitas e reagrupando os que dependen da mesma variable, temos os sistema:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n = b_n \end{cases}$$

Esto é o que se coñece como **sistema de Leontief**.

Os números $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$ chámanse os **coeficientes técnicos** ou **coeficientes de input**.

Para un conxunto $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ de cantidades de demanda final, unha solución $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ do sistema anterior dará a producción que cada industria debe realizar para cubrir as necesidades das outras e a demanda final.

Por suposto só ten sentido para valores non negativos das x_i.

Para ver a importancia dos sistemas de ecuacións lineais en economía, móstrase a continuación un sinxelo exemplo do modelo input-output debido a Leontief.

Exemplo 5 *Unha economía ten 3 industrias: pesca, madeira e construcción de barcos.*
Para producir unha tonelada de pescado requírense os servicios de n barcos pesqueiros.
Para producir unha tonelada de madeira requírense p toneladas de pescado para alimentar ós madereiros.
Para producir un barco pesqueiro requírense m toneladas de madeira.

Estas son as únicas materias primas que cada unha das 3 industrias necesita. Supoñamos que non hai demanda final (externa) de barcos pesqueiros. Calcular a producción bruta de cada industria se hai que cubrir a producción de d_1 toneladas de pescado e d_2 toneladas de madeira.

Solución: Sexa x_1 o número total de toneladas de pescado que hai que producir, x_2 o número total de toneladas de madeira, e x_3 o número total de barcos pesqueiros.

Consideremos primeiro o pescado. Como se necesitan px_2 toneladas de pescado para producir x_2 de madeira, e como a demanda final de pescado é d_1, deberá cumplirse que $x_1 = px_2 + d_1$ (A producción de barcos de pesca non require consumo de pescado, logo non hai termo en x_3).

A producción de madeira faise según a ecuación $x_2 = mx_3 + d_2$. Finalmente, só a industria pesqueira necesita barcos, non hai demanda final neste caso, así que $x_3 = nx_1$.

Polo tanto débese satisfacer o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 = px_2 + d_1 \\ x_2 = mx_3 + d_2 \\ x_3 = nx_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtense que

$$x_1 = \frac{d_1 + pd_2}{1 - npm}; \quad x_2 = \frac{nmd_1 + d_2}{1 - npm}; \quad x_3 = \frac{nd_1 + npd_2}{1 - npm}$$

Claramente esta solución só ten sentido se $npm < 1$ (xa que se $npm \geq 1$, é imposible para esta economía cubrir calquera demanda final de pescado e madeira - a producción é demasiado ineficiente.)