Matemáticas I: Economía

TEMA 1: Espacios Vectoriais.

1. **Definicións.**
2. **Dependencia e independencia lineal.**
3. **Subespacios.**
4. **Bases. Dimensión.**

Introducción: Dende o punto de vista abstracto ou formal, o Álxebra Lineal fundaméntase nunha estructura alxebraica denominada *espacio vectorial*. Neste tema presentaremos esa estructura e os conceptos e resultados fundamentais relacionados con ela, que na súa maior parte dedúcense a partires das nocións de dependencia e independencia lineal e de sistema xenerador.

Pero, ¿que ten esto que ver ca Economía? Vexamos un exemplo sinxelo:

Supoñamos que unha tenda vende n bens distintos, designados por $V_1, V_2, \cdots, V_n$. Cada mes anótase a cantidade $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de cada ben que hai en existencia. Para traballar posteriormente con estes datos convén representalos mediante un conxunto ordeado de números $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ que se distingue non só polos elementos que contén senón pola orde en que se colocan, é dicir por un vector (elemento dun espacio vectorial) de $I\!R^n$. Polo tanto convén ter claro que "operacións"podemos facer con estes elementos, e que propiedades teñen ditas operacións, para poder abordar sen dificultades operativas os problemas económicos.

A maior parte dos problemas económicos resólvense en $I\!R^n$, así que, ainda que o tema estea plantexado para un espacio vectorial real calquera, os exemplos faranse fundamentalmente en $I\!R^n$.

Ó longo de todo o tema intercalaranse exercicios resoltos cós resultados teóricos e exemplos de aplicación. Ó final proporanse cuestións, exercicios e problemas de enunciado económico relacionados cás cuestións teóricas vistas no tema. Por último haberá un par de seccións de cuestións e exercicios globais resoltos que permitan arrancar e ter unha guía na resolución dos propostos.

1. Definicións.

En $I\!R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in I\!R\}$ podemos definir as seguintes operacións:

Suma **:** **Se** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in I\!R^n$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in I\!R^n$$

***Producto por números reais*:** **Se** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!R^n$ **e** $\lambda \in I\!R$

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in I\!R^n$$

Estas operacións verifican as seguintes propiedades:

1. ***Asociativa*:** $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in I\!R^n$.

2. ***Elemento neutro*:** $\exists \theta \in I\!R^n$ **tal que** $\mathbf{x} + \theta = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in I\!R^n$ $(\theta = (0, \ldots, 0) \in I\!R^n)$.

3. ***Elemento oposto*:** $\forall \mathbf{x} \in I\!R^n$, $\exists -\mathbf{x} \in I\!R^n$ **tal que** $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \theta$.
Nota: se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), -\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

4. ***Conmutativa*:** $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in I\!R^n$.

5. ***Asociativa para escalares*:** $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in I\!R^n$, $\forall \alpha, \beta \in I\!R$.

6. ***Distributiva para escalares*:** $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in I\!R^n$, $\forall \alpha, \beta \in I\!R$.

7. ***Distributiva para vectores*:** $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in I\!R^n$, $\forall \alpha \in I\!R$.

8. ***Elemento neutro para escalares*:** $\exists 1 \in I\!R$ **tal que** $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in I\!R^n$.

Nota: Os elementos de $I\!R^n$ denomínanse *vectores* e os de $I\!R$ *escalares*.

Definición 1 ***Un conxunto V no que están definidas dúas operacións:***

suma de vectores (+) $u + v \in V$, $\forall u, v \in V$

producto por escalares (·) $r \cdot v \in V$, $\forall v \in V$, $\forall r \in I\!R$

verificando as propiedades

1. **Asociativa*:*** $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$.

2. **Elemento neutro*:*** $\exists^\bullet \theta \in V$ ***tal que*** $v + \theta = v$, $\forall v \in V$.

3. **Elemento oposto*:*** $\forall v \in V,\ \exists^{\bullet} -v \in V$ ***tal que*** $v + (-v) = \theta$**.**

4. **Conmutativa*:*** $u + v = v + u,\ \forall u, v \in V$**.**

5. **Asociativa para escalares*:*** $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v,\ \forall v \in V,\ \forall \alpha, \beta \in I\!R$**.**

6. **Distributiva para escalares*:*** $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v,\ \forall v \in V,\ \forall \alpha, \beta \in I\!R$**.**

7. **Distributiva para vectores*:*** $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v,\ \forall u, v \in V,\ \forall \alpha \in I\!R$**.**

8. **Elemento neutro para escalares*:*** $\exists 1 \in I\!R$ ***tal que*** $1 \cdot v = v,\ \forall v \in V$**.**

chámase espacio vectorial real, ou $I\!R$***-espacio vectorial ou simplemente espacio vectorial.***

Propiedades: **Se** $(V, +, \cdot)$ **é un espacio vectorial, verifícase:**

1. $\lambda\theta = \theta,\ \forall \lambda \in I\!R$**. Xa que se** $v \in V$**,** $\lambda v = \lambda(v + \theta) = \lambda v + \lambda\theta$**, polo tanto** $\lambda\theta = \theta$**.**

2. $0v = \theta,\ \forall v \in V$**. Xa que se** $\lambda \in I\!R$**,** $\lambda v = (\lambda + 0)v = \lambda v + 0v$**, por tanto** $0v = \theta$**.**

3. $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v),\ \forall \lambda \in I\!R,\ \forall v \in V$**.** **Pois** $(-\lambda)v + \lambda v = (-\lambda + \lambda)v =$ $= 0 \cdot v = \theta$ **e** $\lambda(-v) + \lambda v = \lambda(-v + v) = \lambda \cdot \theta = \theta$**,** $\forall \lambda \in I\!R,\ \forall v \in V$**.**

4. Sexan $\lambda \in I\!R$ **e** $v \in V$**. Se** $\lambda v = \theta$ **entón** $\lambda = 0$ **ou** $v = \theta$**.**
En efecto, se $\lambda \neq 0$ **existe** $\lambda^{-1} \in I\!R$ **tal que** $\lambda\lambda^{-1} = \lambda^{-1}\lambda = 1$ **e polo tanto**

$$\lambda v = \theta \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}\theta \Rightarrow (\lambda^{-1}\lambda)v = \theta \Rightarrow 1 \cdot v = \theta \Rightarrow v = \theta$$

Como se pode observar, son as propiedades que estamos acostumbrados a utilizar nas operacións con números.

Exercicio 1 En $I\!R^2 = \{(x, y) : x, y \in I\!R\}$ **están definidas as operacións:**

$$\begin{array}{ll} (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) & \\ r \cdot (x, y) = (rx, ry) & \forall (x, y), (a, b) \in I\!R^2,\ \forall r \in I\!R. \\ r * (a, b) = (ra, 0) & \end{array}$$

Comprobar que $(I\!R^2, +, \cdot)$ **é un espacio vectorial pero** $(I\!R^2, +, *)$ **non é espacio vectorial.**

Solución: No primeiro caso, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ verifica as seguintes propiedades:

1. Asociativa: $[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) =$

$$= ([x_1 + y_1] + z_1, [x_2 + y_2] + z_2) \underset{(1)}{=} (x_1 + [y_1 + z_1], x_2 + [y_2 + z_2]) = (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) =$$

$$= (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)], \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Pola propiedade asociativa da suma nos números reais.

2. Elemento neutro: $\exists \theta = (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) \underset{(2)}{=} (x_1, x_2), \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

(2) Por ser o cero o neutro da suma en $\mathbb{R}$.

3. Elemento oposto: $\forall \ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ \exists - \mathbf{x} = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2)) \underset{(3)}{=} (0, 0).$$

(3) Por ser $-x_1, -x_2$ os opostos de $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

4. Conmutativa: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \underset{(4)}{=} (y_1 + x_1, y_2 + x_2) =$

$$= (y_1, y_2) + (x_1, x_2), \ \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(4) Pola propiedade conmutativa da suma de números reais.

5. Asociativa para escalares: $\alpha[\beta(x_1, x_2)] = \alpha(\beta x_1, \beta x_2)] = (\alpha[\beta x_1], \alpha[\beta x_2]) \underset{(5)}{=} ([\alpha\beta]x_1, [\alpha\beta]x_2) =$

$$= [\alpha\beta](x_1, x_2), \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(5) Pola propiedade asociativa do producto de números reais.

6. Distributiva para escalares: $[\alpha + \beta](x_1, x_2) = ([\alpha + \beta]x_1, [\alpha + \beta]x_2) \underset{(6)}{=} (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) =$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2), \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(6) Pola propiedade distributiva do producto respecto á suma de números reais.

7. Distributiva para vectores: $\alpha[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha[x_1 + y_1], \alpha[x_2 + y_2]) \underset{(6)}{=}$

$$(\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2), \ \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

8. Elemento neutro para escalares: $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1(x_1, x_2) = (1x_1, 1x_2) \underset{(8)}{=} (x_1, x_2), \ \forall x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

(8) Por ser o un o neutro do producto de números reais.

Polo tanto $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é un espacio vectorial.

Agora ben, $(\mathbb{R}^2, +, *)$ **non é espacio vectorial**, dado que ó ser $r * (a, b) = (ra, 0)$, non se verifica a propiedade 8 xa que $1 * (a, b) = (1a, 0) \neq (a, b)$, sempre que $b \neq 0$.

Observade que un mesmo conxunto, dependendo das operacións de suma e producto por números reais que definamos nel, pode ter ou non estructura de espacio vectorial.

Definición 2 **Sexa V un espacio vectorial.**
$v \in V$ é *combinación lineal* de $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ se existen $r_1, r_2, \ldots, r_n \in I\!R$ (chamados coeficientes da combinación lineal) tales que

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n.$$

Exemplo 1 *(Sydsaeter, px. 308)* **Unha compañía petroleira pode converter un barril de cru en 3 clases distintas de combustible. Sen engadir chumbo, as súas produccións das 3 clases de combustible a partires dun barril de cru veñen dadas polo vector $(2,2,4)$. Có máximo legalmente permitido de aditivos de chumbo, as produccións son $(5,0,3)$. Supoñendo que os efectos dos aditivos de chumbo son proporcionais; isto é, ó utilizar unha fracción δ do máximo permitido $(0 \leq \delta \leq 1)$ obtense a producción**

$$(1-\delta)(2,2,4) + \delta(5,0,3)$$

pregúntase:
a) ¿É posible unha producción que corresponda ós seguintes vectores?
(i) $(7/2, 1, 7/2)$ *(ii)* $(4, 1/3, 10/3)$ *(iii)* $(1, 6, 9)$ *(iv)* $(4, 2/3, 10/3)$
b) En caso afirmativo, ¿que proporción de aditivos de chumbo legalmente permitidos deberá utilizarse en cada caso?

Solución: Dado que $(1-\delta)(2,2,4) + \delta(5,0,3) = (2+3\delta, 2-2\delta, 4-\delta)$, haberá que ver, en cada caso, se hai un valor de δ que permita obter a producción requerida.
i) $(7/2, 1, 7/2) = (2+3\delta, 2-2\delta, 4-\delta) \Leftrightarrow 2+3\delta = 7/2, 2-2\delta = 1, 4-\delta = 7/2 \Leftrightarrow \delta = 1/2$.
Polo tanto neste caso si é posible. Obtense engadindo a mitade do máximo permitido de chumbo.
ii) $(4, \frac{1}{3}, \frac{10}{3}) = (2+3\delta, 2-2\delta, 4-\delta) \Leftrightarrow 2+3\delta = 4, 2-2\delta = \frac{1}{3}, 4-\delta = \frac{10}{3} \Rightarrow \delta = \frac{2}{3}, \delta = \frac{5}{6}$. Imposible.
iii) $(1, 6, 9) = (2+3\delta, 2-2\delta, 4-\delta) \Leftrightarrow 2+3\delta = 1, 2-2\delta = 6, 4-\delta = 9$. Imposible, pois $0 \leq \delta \leq 1$.
iv) $(4, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}) = (2+3\delta, 2-2\delta, 4-\delta) \Leftrightarrow 2+3\delta = 4, 2-2\delta = \frac{2}{3}, 4-\delta = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \delta = \frac{2}{3}$. Polo tanto neste caso si é posible. Obtense engadindo as dúas terceiras partes do máximo permitido de chumbo.

Observación 1 a) Todo vector é combinación lineal de calquera conxunto de vectores que conteña a ese vector. En efecto, se $v \in C = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, como $v = 1 \cdot v + \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i$, v é combinación lineal dos elementos de C.

b) Se $v \in V$ é combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e cada v_i é combinación lineal de $w_1, w_2, \ldots, w_m \in V$, entón v tamén será combinación lineal de $w_1, w_2, \ldots, w_m$.

En efecto, se $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e $v_i = \alpha_{i1} w_1 + \cdots + \alpha_{im} w_m$, entón

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j} w_j + \cdots + \lambda_n \sum_{j=1}^{m} \alpha_{nj} w_j = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{i1}) w_1 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{im}) w_m$$

c) O vector nulo, θ, é combinación lineal de calquera conxunto de vectores, xa que $\theta = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n, \ \forall v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.

Pero esta combinación lineal, en xeral, non ten por que ser a única que expresa o vector cero como combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.
Por exemplo $(0,0,0) = (1,0,1) - (1,1,1) + (0,1,0)$, pois $(1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0)$.

2. Dependencia e independencia lineal.

Definición 3 Sexa V un espacio vectorial.

Dícese que $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ son *linealmente independentes*, ou que o conxunto $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linealmente independente, se o vector cero non se pode obter como combinación lineal dos elementos $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ salvo que tódolos coeficientes sexan nulos, i.e. se $r_1, r_2, \dots, r_n \in I\!R$ e $r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_nv_n = \theta$ a "única"posibilidade é que $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

Dícese que $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ son *linealmente dependentes* se non son linealmente independentes. Neste caso, algún v_i pódese obter como combinación lineal dos restantes.

Observación 2 Todo conxunto de vectores que conteña ó vector cero é un conxunto de vectores linealmente dependente.

Exercicio 2 Comproba se os seguintes conxuntos de vectores son linealmente independentes. Se non o son, dá a relación de dependencia que existe entre os seus elementos.

a) $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\} \subset I\!R^3$.

Solución: Dado que $r(1,1,0)+s(0,1,1)+t(1,0,1) = (r+t, r+s, s+t)$, $r(1,1,0)+s(0,1,1)+t(1,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow\ r+t = r+s = s+t = 0\ \Leftrightarrow\ r = s = t = 0$, eses vectores son linealmente independentes.

b) $\{(1,1),(3/2,0),(-1,2)\} \subset I\!R^2$.

Solución: Dado que $2(1,1) - 2(3/2,0) = (-1,2)$, eses vectores son linealmente dependentes.

c) $\{(1,1,2),(0,2,1),(1,-1,1)\} \subset I\!R^3$.

Solución: Dado que $r(1,1,2) + s(0,2,1) + t(1,-1,1) = (r+t, r+2s-t, 2r+s+t)$,
$r(1,1,2) + s(0,2,1) + t(1,-1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow\ r+t = r+2s-t = 2r+s+t = 0\ \Leftrightarrow\ -r = s = t$,
eses vectores son linealmente dependentes; e a relación de dependencia é $(1,1,2) = (0,2,1)+(1,-1,1)$.

d) $\{(0,0,1,3),(2,1,0,1),(3,0,1,1)\} \subset I\!R^4$.

Solución: Dado que $r(0,0,1,3) + s(2,1,0,1) + t(3,0,1,1) = (2s+3t, s, r+t, 3r+s+t)$,
$r(0,0,1,3)+s(2,1,0,1)+t(3,0,1,1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow\ 2s+3t = s = r+t = 3r+s+t = 0\ \Leftrightarrow\ r = s = t = 0$,
eses vectores son linealmente independentes.

e) $\{(1,1,-1,1),(0,2,3,1),(5,4,1,-2),(3,0,0,0)\} \subset I\!R^4$.

Solución: Dado que $r(1,1,-1,1)+s(0,2,3,1)+t(5,4,1,-2)+u(3,0,0,0) = (r+5t+3u, r+2s+4t, -r+3s+t, r+s-2t)$, $r(1,1,-1,1)+s(0,2,3,1)+t(5,4,1,-2)+u(3,0,0,0) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow\; r+5t+3u = r+2s+4t = -r+3s+t = r+s-2t = 0 \;\Leftrightarrow\; r=s=t=u=0$,

eses vectores son linealmente independentes.

f) $\{1,x,x^2,x^3\} \subset P_3[x] = \{ax^3+bx^2+cx+d/a,b,c,d \in I\!R\}$.

Solución: Dado que $r1+sx+tx^2+ux^3 = \theta \Leftrightarrow\; r=s=t=u=0$,

eses vectores son linealmente independentes.

g) $\{3, 8-x^2\} \subset P_2[x] = \{ax^2+bx+cx/a,b,c \in I\!R\}$.

Solución: Dado que $r3+s(8-x^2) = 3r+8s-sx^2$, $r3+s(8-x^2) = \theta \Leftrightarrow\; 3r+8s = -s = 0 \Leftrightarrow\; r=s=0$,

eses vectores son linealmente independentes.

h) $\{\frac{7}{2}, -3x-2, x+3\} \subset P_2[x] = \{ax^2+bx+cx/a,b,c \in I\!R\}$.

Solución: Dado que $r\frac{7}{2}+s(-3x-2)+t(x+3) = \theta \Leftrightarrow\; \frac{7}{2}r-2s+3t = -3s+t = 0 \Leftrightarrow\; r=-2s, t=3s, s \in I\!R$,

eses vectores son linealmente dependentes; e a relación de dependencia é $-3x-2 = 2\frac{7}{2} - 3(x+3)$.

3. Subespacios.

Definición 4 Sexa V un espacio vectorial. $W \subset V$, $W \neq \emptyset$, é un *subespacio vectorial de* V se W cas operacións de V é un espacio vectorial.

Equivalentemente, se $\quad \alpha v+\beta w \in W,\ \forall v,w \in W,\ \forall \alpha,\beta \in I\!R.$

É dicir, se calquera combinación lineal de elementos de W é un novo elemento de W.

Observación 3 1) Se W é un subespacio vectorial de V verifícase:
O vector cero de V (θ) é de W (posto que $\theta = 0\cdot w,\ \forall w \in W$).
Se $w \in W$, $-w$ ten que ser de W (xa que $-w = (-1)w$).

2) Se V é un espacio vectorial, $\{\theta\}$ e V son subespacios vectoriais de V, denominados *subespacios triviais.* Calquera outro subespacio de V distinto dos dous anteriores chámase subespacio propio ou non trivial de V.

3) Se V é un espacio vectorial (ou un subespacio vectorial) ou ben ten só un elemento (espacio trivial $\{\theta\}$) ou ben ten infinitos elementos.

En efecto, se existe $v \in V,\ v \neq \theta$, como $\lambda v \in V\ \forall \in I\!R$ e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entón $\lambda_1 v \neq \lambda_2 v$ (xa que $\lambda_1 v = \lambda_2 v\ \Leftrightarrow\ (\lambda_1-\lambda_2)v = \theta$, e como $v \neq \theta$, pola propiedade 4

de espacio vectvectorial, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$); polo que en V haberá alomenos tantos elementos distintos coma en $I\!R$, ou sexa infinitos elementos.

Definición 5 **Sexan V un espacio vectorial e $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.**

Denomínase *subsespacio xenerado por* C ó conxunto de tódalas combinacións lineais de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

$$\langle C \rangle = \{r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n : r_i \in I\!R, i = 1, \ldots, n\}$$

Exemplo 2 *Se $W = \langle \{(1,0,1),(0,1,0)\} \rangle$ entón, por definición,*

$$W = \{r(1,0,1)+s(0,1,0)/r,s \in I\!R\} = \{(r,0,r)+(0,s,0)/r,s \in I\!R\} = \{(r,s,r)/r,s \in I\!R\}.$$

Ou sexa, W estará formado por aqueles elementos de $I\!R^3$ que teñan as compoñentes 1ª e 3ªiguais.

Observación 4 **1) $\langle C \rangle$ é un subespacio vectorial de V.**

Xa que se $u, v \in \langle C \rangle = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle$, existen, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $s_i, r_i \in I\!R$ para os que $u = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i,\ v = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$; e polo tanto

$$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{n} s_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha r_i + \beta s_i) v_i \in \langle C \rangle,\ \forall\ \alpha, \beta \in I\!R.$$

No caso do exemplo anterior, efectivamente o conxunto $W = \{(r,s,r)/r,s \in I\!R\}$ cás operacións de suma (compoñente a compoñente) e producto por números (multiplicando cada compoñente polo número) é un subespacio vectorial. ($\forall \alpha, \beta \in I\!R, \forall u = (r,s,r), v = (r',s',r') \in W, \alpha u + \beta v = (\alpha r + \beta r', \alpha s + \beta s', \alpha r + \beta r') \in W$)

2) Se $\langle C \rangle = V$, do conxunto C, ou dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dícese que xeneran V ou que son un sistema (ou conxunto) de xeneradores do subespacio V.

No caso do exemplo anterior, $W = \langle \{(1,0,1),(0,1,0)\} \rangle$, dícese que o conxunto $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ é o conxunto (sistema) de xeneradores de W, ou ben que W está xenerado polos vectores $(1,0,1),(0,1,0)$

3) Se $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ e v é combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, entón

$$\langle \{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle.$$

En efecto, $\forall\ v \in V$**,** $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle \subset \langle\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle$**,**

e se $v = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$**,** **entón** $\forall u \in \langle C\rangle$**,** $u = \lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n =$

$= \lambda \sum_{i=1}^{n} s_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda s_i + \lambda_i) v_i \in \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle$**.**

No caso do exemplo anterior, $W = \langle\{(1,0,1),(0,1,0)\}\rangle$, dado que $v = (1,2,1) = (1,0,1) + 2(0,1,0)$, entón $W = \langle\{v,(1,0,1),(0,1,0)\}\rangle$.

Exercicio 3 Comproba se os seguintes conxuntos son subespacios vectoriais. En caso afirmativo, exprésao como un subespacio xenerado por un conxunto de vectores.

a) $A = \{(x,y) \in I\!R^2; x = 0\} \subset I\!R^2$

Solución: *Sexan* $(x,y),(x',y') \in A$ $(x = 0, x' = 0)$*; e* $\alpha, \beta \in I\!R$*,*

$$\alpha(x,y) + \beta(x',y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \in A,$$

xa que $\alpha x + \beta x' = 0$*. Polo tanto* A *é un subespacio vectorial.*

$$A = \{(0,y); y \in I\!R\} = \{y(0,1); y \in I\!R\} = \langle\{(0,1)\}\rangle.$$

b) $B = \{(x,y) \in I\!R^2; y = 1\} \subset I\!R^2$

Solución: B *non é un subespacio vectorial de* $I\!R^2$*, pois* $(0,0) \notin B$ *por non ser* 1 *a súa segunda compoñente.*

c) $C = \{(x,y) \in I\!R^2; y = 0\} \subset I\!R^2$

Solución: *De modo similar a a), compróbase que* C *é subespacio vectorial.*

$$C = \{(x,0); x \in I\!R\} = \{x(1,0); x \in I\!R\} = \langle\{(1,0)\}\rangle.$$

d) $D = A \bigcap C$**,** $T = A \bigcup C$

Solución: $D = A \bigcap C = \{(x,y) \in I\!R^2; x = 0\} \bigcap \{(x,y) \in I\!R^2; y = 0\} = \{(0,0)\}$.

Polo tanto D *é subespacio vectorial (trivial) de* $I\!R^2$*.*

$T = A \bigcup C = \{(x,y) \in I\!R^2; x = 0 \text{ ou y} = 0\}$ *non é subespacio vectorial,*

pois $(1,0),(0,1) \in T$ *pero* $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin T$*.*

e) $E = \{ax^3 + ax + b; a,b \in I\!R\} \subset P_3[x]$

Solución: *Sexan* $ax^3 + ax + b$, $cx^3 + cx + d \in E$ *e* $r,s \in I\!R$*.*

Como $r(ax^3 + ax + b) + s(cx^3 + cx + d) = (ra + sc)x^3 + (ra + sc)x + rb + sd \in E$*,* *obtense que E é un subespacio vectorial de $P_3[x]$.*

$$E = \{a(x^3 + x) + b; a, b \in \mathbb{R}\} = \langle\{x^3 + x, 1\}\rangle$$

f) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y^2 + z\} \subset \mathbb{R}^3$

Solución: *F non é subespacio vectorial posto que, por exemplo $(2, 1, 1) \in F$ pero o seu oposto $(-2, -1 - 1) \notin F$ xa que $-2 \neq (-1)^2 + (-1)$.*

4. Bases. Dimensión.

Definición 6 Sexa V un espacio vectorial non trivial ($V \neq \{\theta\}$).
Un subconxunto $B \subset V$ é unha *base de* V se:

1. **B é un conxunto linealmente independente;**
2. **B é un conxunto de xeneradores de V.**

Exemplo 3 Para cada $i = 1, \ldots, n$, sexa $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

$C = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é unha base de $\mathbb{R}^n$, que se chama *base canónica.*

Exercicio 4 Determinar unha base de cada un dos subespacios vectoriais A, C, D e E do exercicio 3.

Solución: Dado que $A = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(0, 1)\}\rangle$, o conxunto $\{(0, 1)\}$ é unha base de A.

Como no caso anterior, ó ser $C = \langle\{(1, 0)\}\rangle$, o conxunto $\{(1, 0)\}$ é unha base de C.

O subespacio $D = \{(0, 0)\}$ non ten bases por ser un subespacio trivial.

Como no caso de A e de C, ó ser $E = \langle\{x^3 + x, 1\}\rangle$, o conxunto $\{x^3 + x, 1\}$ é unha base de E.

Teorema 1 Sexan V un espacio vectorial e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

B é unha base de V se, e só se, para cada $\mathbf{v} \in V$, existen $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ "únicos" verificando que $\mathbf{v} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n$.

É dicir, calquera elemento de V escríbese de forma única como combinación lineal dos elementos de B.

Demostración: No Apéndice.

Definición 7 **Sexan $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ unha base dun espacio vectorial V e $\mathbf{v} \in V$. Chámanse *coordenadas de* $\mathbf{v}$ *respecto da base* B ós coeficientes $r_1, r_2, \ldots, r_n \in I\!R$, únicos, tales que $\quad \mathbf{v} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n$.**

As denotaremos por $\quad \mathbf{v}_{_B} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$**, ou ben** $\quad \mathbf{v} \underset{B}{\equiv} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

Observación 5 **As coordenadas dun vector respecto dunha base son únicas, pero un mesmo vector pode ter diferentes coordenadas respecto de diferentes bases, como pon de manifesto o seguinte exercicio.**

Exercicio 5 **Sexan $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ dúas bases de $I\!R^3$.**

Calcular as coordenadas de $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ respecto a C e respecto a B.

Solución: $\mathbf{v}_{_C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, **xa que** $\mathbf{v} = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$.

$$(1, 2, 3) = \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 1, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = \beta + \gamma \\ 2 = \alpha + \gamma \\ 3 = \alpha + \beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \mathbf{v}_{_B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De modo análogo calcúlase que $\quad \mathbf{x}_{_C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad$ **e** $\quad \mathbf{x}_{_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Teorema 2 ***(Steinitz)*** **Sexa $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base do espacio vectorial V.**

Se $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subset V$ é un conxunto de vectores linealmente independentes, entón:

a) pódense sustituir "p"dos vectores de B por $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ e obter unha nova base de V.

b) $p \leq n$.

Corolario 1 **Sexa V un espacio vectorial e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ unha base de V. Entón:**

1. **n é o número máximo de vectores linealmente independentes en V;**

Demostración: É consecuencia inmediata do apartado b) do teorema.

2. Todo xenerador de V ten alomenos n elementos;

Demostración: En caso contrario, se existise un conxunto de xeneradores con menos de n elementos, unha vez suprimidos del os que son combinación lineal de outros, quedaríamos cun conxunto de vectores linealmente independente que seguiría sendo sistema de xeneradores do espacio, e polo tanto base do mesmo, que tería menos de n elementos; o que é imposible porque entón a base de partida, que é un conxunto linealmente independente, tería máis elementos cos desta última, o que contradice o apartado b) do teorema.

3. Tódalas bases de V teñen n elementos.

Demostración: Sexan $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $B' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ dúas bases de V.

Por ser B base é un conxunto linealmente independente, entón, polo apartado b) do teorema, verifícase que $n \leq m$. Pero, por ser B' base é un conxunto linealmente independente, entón, de novo polo apartado b) do teorema, verifícase que $m \leq n$. Có cal a única posibilidade é que $n = m$; ou sexa ámbalas dúas bases teñen o mesmo número de elementos.

Definición 8 Sexa V un espacio vectorial, $V \neq \{\theta\}$. Se chama ***dimensión de*** V ó número de elementos dunha calquera das súas bases. Denótase $\dim V$.

Se V non ten bases cun número finito de elementos diremos que V é de ***dimensión infinita.***

Se $V = \{\theta\}$, $\dim V = 0$.

Exercicio 6 Determinar a dimensión de cada un dos subespacios vectoriais A, C, D e E do exercicio 3.

Solución: Posto que o conxunto $\{(0,1)\}$ é unha base de A, a súa dimensión é un, $\dim A = 1$.

Como no caso anterior, ó ser o conxunto $\{(1,0)\}$ unha base de C, $\dim C = 1$.

Ó ser $D = \{(0,0)\}$ a súa dimensión é cero, $\dim D = 0$.

Como no caso de A e de C, ó ser o conxunto $\{x^3 + x, 1\}$ unha base de E, $\dim E = 2$.

Corolario 2 Sexa V un espacio vectorial, $\dim V = n$.

a) Calquera conxunto con máis de n elementos é linealmente dependente.

Demostración: É consecuencia inmediata do apartado b) do teorema.

b) Un conxunto con n elementos é base se, e só se, é linealmente independente.

Demostración: É consecuencia inmediata do apartado a) do teorema (unha vez sustituidos os vectores da base polos independentes obtense unha nova base que só consta dos vectores do conxunto independente de partida).

c) Un conxunto con n elementos é base se, e só se, é sistema de xeneradores de V.

Demostración: É consecuencia de que nese caso o sistema de xeneradores ten que estar formado por vectores independentes, pois en caso contrario eliminando os dependentes obteríase un novo sistema de xeneradores e linealmente independente (ou sexa unha base) con menos de n elementos, o que contradice o apartado 3) do corolario anterior.

Exercicio 7 Determinar unha base de $\mathbb{R}^3$ que conteña ós vectores $(1, 0, -1), (1, 0, 2)$.

Posto que os vectores $(1, 0, -1), (1, 0, 2)$ ***son linealmente independentes e*** $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ***é unha base de*** $\mathbb{R}^3$***, a teoría asegúranos que se poden sustituir dous dos elementos de*** C ***por eses vectores e obter unha nova base. Por outra parte, como eses dous vectores teñen a súa segunda compoñente nula, e unha base ten que ser un conxunto de xeneradores do espacio, necesitaremos engadirlles un vector que teña a súa segunda compoñente non nula, por exemplo o segundo elemento de*** C***.***

Así, unha vez comprobado que o conxunto $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ ***é linealmente independente, xa se ten que é unha base de*** $\mathbb{R}^3$ ***(por estar formado por tres vectores linealmente independentes e ser*** $\mathbb{R}^3$ ***un espacio de dimensión 3) e contén ós vectores*** $(1, 0, -1), (1, 0, 2)$ ***como nos pedía o enunciado.***

Corolario 3 Se W é un subespacio dun espacio vectorial V, $\dim W \leq \dim V$.

Ademáis, $\dim W = \dim V$ ***se, e só se,*** $W = V$***.***

Demostración: Se $\dim W = m$ ***e*** $\dim V = n$***, calquera base de*** W ***terá*** m ***elementos, pero dita base será un conxunto linealmente independente de*** V ***e, polo apartado b) do teorema, deberá ser*** $m \leq n$***.***

Se $\dim W = \dim V = n$***, calquera base de*** W***, que será un conxunto linealmente independente de*** V***, terá*** n ***elementos; pero entón, polo apartado a) do teorema, será unha base de*** V ***e polo tanto un sistema de xeneradores del, polo que todo elemento de*** V ***tamén será de*** W***, e polo tanto ambos conxuntos coincidirán.***

Exercicio 8 Expresa, se é posible, o vector $(-5, 8, 11)$ como combinación lineal dos vectores $a = (1, 3, 4)$, $b = (1, 2, 5)$ e $c = (-1, 2, -9)$. Co resultado obtido, contesta ás seguintes preguntas: ¿pode ser $\{a, b, c\}$ unha base de $\mathbb{R}^3$?, ¿é o conxunto $\{a, b, c\}$ linealmente independente?, ¿pertence $(-5, 8, 11)$ ó subespacio $S = \langle\{a, b, c\}\rangle$?, ¿que se pode dicir da dimensión de S? Da unha base de S e complétaa a unha base de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Como $(-5,8,11) = r(1,3,4)+s(1,2,5)+t(-1,2,-9) \Leftrightarrow \begin{cases} r+s-t=-5 \\ 3r+2s+2t=8 \\ 4r+5s-9t=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=t-s-5 \\ 5t-s=23 \\ -5t+s=31 \end{cases}$, **o cal é imposible, obtense que non se pode expresar o vector** $(-5,8,11)$ **como combinación lineal dos vectores** $a,\ b,\ c$**.**

Polo tanto, eses vectores non poden constituir unha base de $\mathbb{R}^3$ **(non son xeneradores de** $\mathbb{R}^3$**) e tampouco ser un conxunto de vectores linealmente independente porque, como son tres e** $\mathbb{R}^3$ **ten dimensión tres, entón serían base, e acabamos de dicir que non o son.**

$(-5,8,11) \notin S = \langle\{a,b,c\}\rangle$ **porque** $(-5,8,11)$ **non é combinación lineal dos vectores** $a,\ b,\ c$**.**

Có anterior pódese dicir que S **non ten dimensión tres.**

Dado que $\{a,b\}$ **é linealmente independente (**$r(1,3,4)+s(1,2,5) = (0,0,0) \Leftrightarrow r = s = 0$**)**

$B = \{a,b\}$ **é unha base de** S**.**

Como $\{(1,3,4),(1,2,5),(1,0,0)\}$ **é linealmente independente (**$r(1,3,4)+s(1,2,5)+t(1,0,0) =$ $= (0,0,0) \Leftrightarrow r = s = t = 0$**) e** $\mathbb{R}^3$ **é de dimensión tres, ese conxunto é base de** $\mathbb{R}^3$ **e contén ós elementos da base de** S**.**

5. Cuestións Propostas.

1. Se $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y=z\}$, pódese afirmar que:

   a) $(0,0) \in V$. b) $(1,-3,-2) \in V$. c) $(1,-3,-2) \notin V$. d) $(1,-3,2) \in V$.

2. ¿Cal dos seguintes conxuntos **NON** é un espacio vectorial real?

   a) $P_3[x]$. b) $\mathbb{N}$. c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x=0\}$. d) $\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}, x \in \mathbb{R}\right\}$.

3. ¿Cal dos seguintes vectores **NON** é combinación lineal de $(1,0,1)$ e $(-1,1,1)$?

   a) $(0,0,0)$. b) $(2,0,2)$. c) $(1,1,1)$. d) $(0,1,2)$.

4. Os vectores $(3,0,-2), (-4,-1,5)$ e $(2,-1,1)$ verifican:

   a) Son linealmente independentes porque $0(3,0,-2)+0(-4,-1,5)+0(2,-1,1) = (0,0,0)$.

   b) Son linealmente dependentes porque $2(3,0,-2)+(-4,-1,5)-(2,-1,1) = (0,0,0)$.

   c) Son linealmente independentes porque son tres vectores en $\mathbb{R}^3$.

   d) Forman unha base de $\mathbb{R}^3$.

5. ¿Cal dos seguintes subconxuntos é un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y=0\}$. b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x=1\}$.
   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x=0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y=0\}$. d) $\{(1,0),(0,0),(-1,0)\}$.

6. Sexan V un espacio vectorial e W un subespacio de V. ¿Cal das seguintes afirmacións é **FALSA**?

   a) $0_V \in W$. b) Toda combinación lineal de elementos de W está en W.
   c) Se $x,y \in V$, entón $x+y \in W$. d) Se $x,y \in W$, entón $x+y \in W$.

7. Sexa $V = \langle\{(-1,0,1),(3,1,0)\}\rangle$, entón:

   a) $V = \{(-1,0,1),(3,1,0)\}$. b) $V = \{\alpha(-1,0,1)+\beta(3,1,0); \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.
   c) $V = \mathbb{R}^3$. d) $V = \{(0,0,0)\}$.

8. ¿Cal dos seguintes vectores **NON** pertence a $\langle\{(3,1,0),(-1,0,1)\}\rangle$?

   a) $(0,0,0)$. b) $(-2,0,2)$. c) $(5,2,1)$. d) $(1,2,1)$.

9. Se $S=\{(1,-1,0),(0,2,1),(1,1,1)\}$, entón:

   a) $\langle S\rangle=\emptyset$. b) $\langle S\rangle=\langle\{(1,-1,0),(0,2,1)\}\rangle$. c) $\langle S\rangle=\mathbb{R}^3$. d) $\langle S\rangle=\langle\{(1,-1,0)\}\rangle$.

10. ¿Cal dos seguintes conxuntos de vectores é unha base de $\mathbb{R}^3$?

    a) $\{(1,-1,0),(0,1,1)\}$. b) $\{(1,-1,1),(e,2,-4),(5,-1,2),(3,-1,1)\}$.
    c) $\{(1,0,0),(-1,1,0),(-2,0,2)\}$. d) $\{(1,-1,1),(-1/2,1/2,-1/2),(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$.

11. O conxunto $B=\{(1,0),(0,1),(0,0)\}$ é:

    a) un subespacio de $\mathbb{R}^2$. b) un conxunto de xeneradores de $\mathbb{R}^2$ que non é base.
    c) unha base de $\mathbb{R}^2$. d) un conxunto linealmente independente en $\mathbb{R}^2$ que non é base.

12. Se $B=\{(3,-1,1),(0,0,0),(6,0,1)\}$, pódese asegurar que:

    a) B non é unha base de $\mathbb{R}^3$, porque non é linealmente independente.

    b) B é unha base de $\mathbb{R}^3$, porque ten 3 vectores e $\dim\mathbb{R}^3=3$.

    c) B non é unha base de $\mathbb{R}^3$, porque non é un sistema de xeneradores, xa que $(6,-2,2)\notin B$.

    d) B non é unha base pero del se pode extraer unha base de $\mathbb{R}^3$.

13. Dada a base de $\mathbb{R}^2$, $B=\{(-1,0),(1,3)\}$:

    a) as coordenadas de $(1,3)$ respecto de B son 1 e 3.

    b) as coordenadas de $(1,3)$ respecto de B son 0 e 1.

    c) $(1,3)$ non ten coordenadas respecto de B, só as ten respecto da base canónica.

    d) $(1,3)$ non ten coordenadas respecto de B porque é un dos vectores da base.

14. Se $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, e as coordenadas de v respecto de B son 1, -1, 1, entón:

    a) $v=(1,-1,1)$. b) $v=(2,2,1)$. c) $v=(2,0,1)$. d) $v=(1,1,0)$.

15. Dada $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$, base de $\mathbb{R}^3$, se as coordenadas de v respecto de B son 1, 1, 1, as coordenadas de v respecto da base canónica son:

    a) 1, 1, 1. b) 2, 2, 1. c) 0, 0, 1. d) 1, 1, 0.

16. ¿Cal dos seguintes vectores, xunto con $(2,0,1)$ e $(0,0,1)$, forma unha base de $\mathbb{R}^3$?

    a) $(2,0,0)$. b) $(4,0,2)$. c) $(0,3,1)$. d) $(2,0,-2)$.

17. ¿Cal é a dimensión do subespacio $V=\left\{\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}, x\in\mathbb{R}\right\}$?

    a) -1. b) 0. c) 2. d) 1.

18. Se $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y=0\}$, pódese asegurar que:

    a) $V=\mathbb{R}^2$. b) $(-1,-1)\in V$. c) $\dim V=2$. d) $\dim V\leq 2$.

19. Sexan V un espacio vectorial e $B=\{u,v,w\}\subset V$. Se existe $x\in V$ e $x\notin\langle B\rangle$, pódese afirmar que:

    a) B non é sistema de xeneradores de V. b) $\dim V>3$.
    c) B non é linealmente independente. d) $\dim V=3$, pois B é unha base de V.

20. Se $W = \{(0,0,z); z \in I\!R, z \neq 0\} \subset I\!R^3$, pódese afirmar que:

a) W non é un subespacio de $I\!R^3$. b)$\{(0,0,1)\}$ é unha base de $I\!R^3$.
c) $W = \langle\{(0,0,1)\}\rangle$. d) W é un subespacio de $I\!R^3$ de dimensión cero.

21. Se $V = \{(x,y,z) \in I\!R^3, x - y = 0\}$, pódese asegurar que:

a) $V = I\!R^2$. b) $\dim V = 1$. c) $\dim V = 2$. d) $\dim V = 3$.

22. Se V é un espacio vectorial de dimensión n e $B = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ con $m < n$, entón:

a) B é un conxunto de vectores linealmente independente pero non base de V.

b) B non é sistema de xeneradores de V.

c) nengún $\mathbf{x} \in V$ se pode escribir como combinación lineal dos elementos de B.

d) B é sistema de xeneradores de V.

23. Se V é un subespacio vectorial de $I\!R^5$, entón:

a) o número de vectores de V debe ser menor ou igual ca 5. b) $\dim V < 5$.
c) calquera base de V debe ter 5 vectores. d) $\dim V \leq 5$.

24. Sexa W un subespacio de $I\!R^4$. Se $\dim W = 4$, verifícase:

a) $W = I\!R^4$. b) $W \subset I\!R^4$, pero $W \neq I\!R^4$.
c) $I\!R^4 \subset W$, pero $W \neq I\!R^4$. d) Ningunha das afirmacións anteriores é correcta.

25. Se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é un sistema de xeneradores do espacio vectorial V, pódese asegurar que:

a) $\dim V \leq n$. b) $\dim V > n$. c) $\dim V = n$. d) $\dim V < n$.

6. Exercicios Propostos.

1. Estudia se ten estructura de espacio vectorial o conxunto de polinomios de grado maior ou igual ca 2, $P^2[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n / a_i \in I\!R, 0 \leq i \leq n, a_n \neq 0, n \geq 2\}$, coas operacións habituais.

2. Comproba que $\{(2,3,2), (1,0,1), (0,1,0)\}$ é linealmente dependente e indica como obter cada un dos vectores como combinación lineal dos outros dous.

3. Estudia se o conxunto $\{(1,-1,2), (1,0,2), (0,1,3), (-1,1,0)\}$ é linealmente dependente e, en caso afirmativo, indica a relación de dependencia que hai entre os seus elementos.

4. Comproba se os seguintes conxuntos son subespacios vectoriais. En caso afirmativo, exprésaos como subespacios xenerados por un conxunto de vectores.

   a) $V = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x = z - t, y = 0\} \subset I\!R^4$. b) $V = \{(x,y,z) \in I\!R^3; x = y + z\} \subset I\!R^3$.
   c) $V = \{(x,y) \in I\!R^2; x = -y\} \subset I\!R^2$. d) $V = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x = y - z, t = 1\} \subset I\!R^4$

5. ¿Que valor debe tomar a para que o vector $(-2,-6,a)$ estea no subespacio $S = \langle\{(1,3,-2), (2,6,-1)\}\rangle$?

6. En $I\!R^3$ considéranse os vectores $a = (3,2,3)$, $b = (0,0,1)$ e $c = (6,4,1)$.

   ¿Pode expresarse $(-3,-2,0)$ como combinación lineal de a, b e c?

   ¿É única esta expresión?, ¿é $\{a,b,c\}$ unha base de $I\!R^3$?

7. Sexa $v \in I\!R^2$ o vector con coordenadas 2, 1 na base $\{(1,1),(-1,0)\}$.
   Calcula as coordenadas de v na base $\{(2,1),(-1,2)\}$ e na base canónica.

8. Comproba que $B = \{(-1,0,1),(-2,-1,0),(1,-2,0)\}$ é unha base de $I\!R^3$.
   Calcula as coordenadas de $(7,-8,1)$ respecto á base B.
   ¿Cal é o vector que ten coordenadas 4, 2, 5 na base B?

9. a) Sexa $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset I\!R^4$, ¿pode ser B un conxunto xenerador de $I\!R^4$?
   b) Sexa $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset I\!R^3$, ¿pode ser B un conxunto linealmente independente?

10. Proba que $\{(1,1,0),(2,3,-1),(1,0,1),(-1,1,1)\}$ é un sistema de xeneradores de $I\!R^3$.
    Extrae del unha base e dá as coordenadas do vector $(1,2,1)$ respecto dela.

11. Comproba que o conxunto $A = \{1, 1-x, (1-x)^2\}$ é unha base do espacio $P_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 / a_i \in I\!R, 0 \le i \le 2\}$.
    Calcula as coordenadas do polinomio $-2x^2 + 2x + 3$ respecto de A.

12. En $I\!R^3$ considéranse os vectores $a = (3,2,3)$, $b = (0,0,1)$ e $c = (1,-2,-4)$.
    Comproba que todo vector $v \in I\!R^3$ pode expresarse como combinación lineal de a, b e c. ¿É única esta expresión?, ¿é $\{a,b,c\}$ unha base de $I\!R^3$?

13. ¿Pode ser $\{(0,-1,\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{50},\frac{\pi}{3}),(7,\sqrt{2},0,\frac{1}{2},e),(3,0,5,6,\ln 5),(0,0,0,0,0),(\cos 3,\sqrt[5]{7},0,0,1)\}$ unha base de $I\!R^5$?

14. Para os conxuntos do exercicio 4 que son subespacios, determina unha base e a dimensión de cada un deles.

    Razoa as respostas.

7. Problemas Propostos.

1. Unha persoa A vai a unha frutería e merca 3 kg. de cereixas, 4 kg. de peras, 3 kg. de laranxas e 5 kg. de mazás. Outra persoa B merca 2 kg. de cereixas, nada de peras, 2 kg. de laranxas e 4 kg. de mazás.
   Supoñamos que os prezos por kilo son: cereixas 0.75 ϵ, peras 0.60 ϵ, laranxas 0.50 ϵ e mazás 0.40 ϵ.
   Se denotamos por $\mathbf{x_A}$ e $\mathbf{x_B}$ ós vectores de compra das persoas A e B, respectivamente, e por $\mathbf{p} = (0{,}75,\ 0{,}60,\ 0{,}50,\ 0{,}40)$ ó vector de prezos,

   a) ¿cal é o vector total de compras das persoas A e B xuntas?, ¿canto costa?

   b) Comproba que o coste da compra de A máis a de B é o total que se calculou no apartado anterior.

2. Unha empresa constructora ten un pedido de tres tipos de casa: 5 de tipo A, 7 de tipo B, e 12 de tipo C.

   Denótase por $\mathbf{x}$ o vector que ten por compoñentes o número de casa de cada tipo.

   Se cada casa de tipo A necesita 20 unidades de madeira, as de tipo B 18 unidades, e as de tipo C 25 unidades, e $\mathbf{u}$ é o vector que ten por compoñentes as cantidades de madeira requeridas polos tipos A, B e C, calcula canta madeira necesita en total a empresa para realizar o pedido, calculando o producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$.

3. Unha empresa produce cantidades non negativas $z_1, z_2, \cdots, z_n$ de n bens distintos, a partires de cantidades non negativas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dos mesmos n bens.

   Para cada $i = 1, \cdots, n$ defínese a *producción neta* do ben i como $y_i = z_i - x_i$. Se p_i é o prezo unitario do ben i, denótase por $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ ó vector de prezos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ó vector de inputs, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ó vector de producción neta, e $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ ó vector de producción. Con estes datos, calcula:

   a) Os ingresos e costes da empresa.

   b) Os beneficios da empresa, e comproba que coincide có producto escalar $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$. ¿Que ocurre se $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$ é negativo?

4. Unha empresa produce o primeiro de dous bens usando o segundo coma materia prima, e o seu vector neto de producción (ver problema 3) é $(2, -1)^t$. Se o vector de prezos é $(1, 3)$, calcula:
   a) o vector de inputs, b) o vector de producción, c) os costes,
   d) os ingresos, e) o valor da producción neta, f) os beneficios ou pérdidas.

8. Cuestións resoltas.

1. Para os vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (0, 3, 1)$, $\mathbf{x} = (-7, 16, 10)$ e $\mathbf{y} = (0, -1, 0)$, ¿cal das seguintes afirmacións é **FALSA**?

   a) $\mathbf{x} = 8\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$. b) $\mathbf{y} \notin < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$. c) $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$. d) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é linealmente dependente.

   Solución: O conxunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é linealmente dependente, posto que $\mathbf{v} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{w}$.

   Polo tanto o apartado d) é correcto, e o apartado c) é falso.

   Ademais, como $8\mathbf{u} - 5\mathbf{v} = 8(1, 2, 0) - 5(3, 0, -2) = (-7, 16, 10) = \mathbf{x}$, o apartado a) é correcto.

   Por último, como $(0, -1, 0) = r(1, 2, 0) + s(3, 0, -2) + t(0, 3, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r + 3s = 0 \\ 2r + 3t = -1 \\ -2s + t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = -3s \\ t = 2s \\ -6s + 6s = -1 \end{array} \right.$ é imposible, o vector $\mathbf{y}$ non é combinación lineal dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

   Polo tanto $\mathbf{y} \notin < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$, e o apartado b) é correcto.

2. Para os mesmos vectores da cuestión 1, ¿pode ser $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ unha base de $I\!R^3$?

   a) Si, porque son 3 vectores de $I\!R^3$. b) Si, porque $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
   c) Non, porque $\mathbf{x}, \mathbf{y} \notin \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. d) Non, porque $\mathbf{y} \notin < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$.

   Solución: Posto que $\mathbf{y} \notin < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$ e $\mathbf{y} \in I\!R^3$, $< \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} > \neq I\!R^3$ e polo tanto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ non é base de $I\!R^3$, por non ser sistema de xeneradores de $I\!R^3$.

   Polo tanto a resposta d) é a única correcta, xa que a) é falsa, pois non é suficiente que sexan 3 vectores para que sexa base de $I\!R^3$; e os apartados b) e c) tamén son falsos pois que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ estean ou non no conxunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ non é motivo para que este sexa ou non base de $I\!R^3$.

Observade que no apartado c) é verdade que o conxunto NON é base, e tamén é verdade que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \notin \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, pero o que non é certo é que esto último sexa motivo para asegurar o primeiro; polo que a afirmación completa non é correcta.

3. Para os mesmos vectores da cuestión 1, ¿é o conxunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ linealmente independente?

   a) Si, porque $(0,0,0) \notin \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. b) Non, porque se o fora sería base de $I\!R^3$ e $I\!R^3 \neq < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$.
   c) Non, porque $\mathbf{x} \notin < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$. d) Si, porque son 3 vectores de $I\!R^3$ linealmente independentes.

   Solución: O que sexa certo o apartado d) da cuestión 1 xa indica que a resposta correcta é que o conxunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ non é linealmente independente, o cal descarta os apartados a) e d) desta cuestión como respostas correctas. O apartado c) tampouco é correcto xa que o que sexa certo o apartado a) da cuestión 1 indica que $\mathbf{x} \in < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$. Por último, o razonamento de b) é correcto, xa que se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ fora linealmente independente, como son 3 vectores de $I\!R^3$ e $\dim(I\!R^3) = 3$, sería base de $I\!R^3$ e xa vimos que non o é. Asi que a resposta correcta a esta pregunta é o apartado b).

4. Para os mesmos vectores da cuestión 1, se $S = < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} >$, ¿cal das seguintes afirmacións é correcta?

   a) $\dim(S) = 3$. b) $\dim(S) = 2$. c) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é unha base de S. d) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$.

   Solución: Posto que, pola cuestión anterior, sabemos que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ non é linealmente independente o apartado a) non pode ser certo.

   Ademais, como $\mathbf{v} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{w}$, temos que $S = < \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} > = < \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\} >$, e como $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ é linealmente independente, xa se ten que $\dim(S) = 2$, o que indica que a resposta correcta é o apartado b).

   En canto os apartados que quedan, c) non é correcto pois para que un conxunto sexa base debe ser linealmente independente e $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ non o é. Por último, d) non é correcto pois, como se viu no apartado b) da cuestión 1, $y \notin S$.

9. Exercicios de recopilación: Resoltos.

1. Estudia se son linealmente independentes os siguintes conxuntos de vectores.

   a) $\{(1,0,1), (1,2,3), (1,0,0)\}$. b) $\{(1,0,0), (1,2,0), (1,2,3), (0,0,4)\}$.

   Solución: a) É un conxunto de vectores linealmente independentes, xa que

$$\alpha(1,0,1) + \beta(1,2,3) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right. .$$

   b) É un conxunto de vectores linealmente dependentes, xa que

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,2,0) + \gamma(1,2,3) + \delta(0,0,4) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 3\gamma + 4\delta = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \delta = -\frac{3}{4}\gamma \\ \gamma \in I\!R \end{array} \right. .$$

   E polo tanto para, por exemplo $\gamma = 1, \beta = -1, \delta = -\frac{3}{4}$ obtense $(1,2,3) = (1,2,0) + \frac{3}{4}(0,0,4)$.

   Observade que $\{(1,0,0), (1,2,0), (0,0,4)\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes.

2. Estudia se os seguintes conxuntos son subespacios vectoriais. En caso afirmativo, obtén unha base e a súa dimensión.

   a) $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : z = x + y\}$. b) $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : z = x + 1\}$.

Solución: a) Sexan $\mathbf{v} = (x, y, z), \mathbf{v}' = (x', y', z') \in W$ $(z = x + y, z' = x' + y')$ e $\alpha, \beta \in I\!R$,

$$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}' = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \in W,$$

xa que $\alpha z + \beta z' = \alpha(x + y) + \beta(x' + y') = \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y'$.

Polo tanto W é un subespacio vectorial. Ademáis, como

$$W = \{(x, y, x + y) : x, y \in I\!R\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) : x, y \in I\!R\} = \langle\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}\rangle.$$

$\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ é unha base de W e $\dim W = 2$.

b) W non é un subespacio vectorial de $I\!R^3$, xa que $(0, 0, 0) \notin W$.

3. Calcula o subespacio vectorial xenerado por $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$, da unha base de $\langle S\rangle$ e obtén a súa dimensión.

Solución: $\langle S\rangle = \{\alpha(1, 0, 1)+\beta(1, 1, 1)+\gamma(0, 1, 0) : \alpha, \beta, \gamma \in I\!R\} = \{(\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\beta) : \alpha, \beta, \gamma \in I\!R\} =$
$= \{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = z\} = \{(x, y, x) : x, y \in I\!R\} = \langle\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}\rangle$.

Observade que $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ é un conxunto de vectores linealmente dependentes, mentras que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é linealmente independente e unha base de $\langle S\rangle$, polo que $\dim\langle S\rangle = 2$.

4. Comproba que é posible expresar $(1, 1)$ como combinación lineal de $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$. ¿É única esta expresión? ¿É $\{(1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$ unha base de $I\!R^2$?

Solución: Existen $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ tales que

$$(1, 1) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) + \gamma(1, 2) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1 = \alpha + \gamma \\ 1 = \beta + 2\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha = 1 - \gamma \\ \beta = 1 - 2\gamma \\ \gamma \in I\!R \end{array}\right. .$$

Có cal $(1, 1)$ pode expresarse de infinitas formas como combinación lineal de $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$ $((1, 1) = (1 - \gamma)(1, 0) + (1 - 2\gamma)(0, 1) + \gamma(1, 2), \forall\gamma \in I\!R)$. E $\{(1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$ non é unha base de $I\!R^2$.

5. Obtén o vector tal que as súas coordenadas na base $\{(1, 1, 0), (0, 0, 2), (0, 5, 7)\}$ sexan 1, 2, 3.

Solución: $\mathbf{v} = 1(1, 1, 0) + 2(0, 0, 2) + 3(0, 5, 7) = (1, 16, 25)$ é o vector pedido.

Apéndice

Teorema 3 (1) *Sexan V un espacio vectorial e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.*

B é unha base de V se, e só se, para cada $\mathbf{v} \in V$, existen $r_1, r_2, \ldots, r_n \in I\!R$ **únicos** *verificando que* $\quad \mathbf{v} = r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n$.

Demostración: "$\Rightarrow$"

Nota.- Nesta primeira parte da demostración (condición necesaria), partindo de que se sabe que B é unha base de V, haberá que probar que é certo que para cada $\mathbf{v} \in V$, existen $r_1, r_2, \ldots, r_n \in I\!R$ **únicos** verificando que $\quad \mathbf{v} = r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n$.

Para elo, sexa $\mathbf{v} \in V$ un elemento calquera de V. Agora ben, por ser B base de V, sabemos que é sistema de xeneradores de V (calquer elemento de V pode obterse como combinación lineal dos elementos de B) e polo tanto existirán $r_1, r_2, \ldots, r_n \in I\!R$ tales que $\mathbf{v} = r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n$.

Para rematar esta primeira parte da demostración teremos que ver que non hai outra posibilidade de obter $\mathbf{v}$ como combinación lineal dos elementos de B. Porque, ¿que pasaría se existisen $s_1, s_2, \ldots, s_n \in I\!R$ tales que $\mathbf{v} = s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_nv_n$?

Daquela $r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_nv_n = s_1v_1+s_2v_2+\cdots+s_nv_n$ e, posto que estamos nun espacio vectorial, $(r_1 - s_1)v_1 + (r_2 - s_2)v_2 + \cdots + (r_n - s_n)v_n = \theta_V$; pero entón, como B é base, é un conxunto de vectores linealmente independente, e polo tanto deberá ser $r_1 - s_1 = 0, r_2 - s_2 = 0, \cdots, r_n - s_n = 0$; ou sexa cada s_i coincide có r_i correspondente, o que indica que é imposible atopar outros coeficientes distintos dos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ para poder obter o vector $\mathbf{v}$ como combinación lineal dos elementos de B, e polo tanto que eses $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son únicos (que é o que pretendíamos demostrar).

"$\Leftarrow$"

Nota.- Nesta segunda parte da demostración (condición suficiente), partindo de que se sabe que para cada $\mathbf{v} \in V$, existen $r_1, r_2, \ldots, r_n \in I\!R$ **únicos** verificando que
$\mathbf{v} = r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n$, haberá que probar que é certo que B é unha base de V.

Polo tanto agora deberemos probar que B é un sistema de xeneradores de V e un conxunto de vectores linealmente independente. Ou sexa, que calquer elemento de V pode obterse como combinación lineal dos elementos de B (o que está garantizado porque partimos de que cada vector $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n \in I\!R$ verificando que $\mathbf{v} = r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n$) e que o único modo de obter θ_V como combinación lineal dos elementos de B é a trivial (o que está garantizado posto que, por se V espacio vectorial, $\theta_V = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$; e pola unicidade dos coeficientes que permiten obter cada vector como combinación lineal dos elementos de B ésa é a única forma de obtelo).

Exercicio 9 Utilizando directamente o teorema de Steinitz, determinar unha base de $I\!R^3$ que conteña ós vectores $(1, 0, -1), (1, 0, 2)$.

Solución: Como $(1, 0, -1) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1)$, podemos obter algún dos e_i, por exemplo $e_1 = (1, 0, 0)$, como combinación lineal de $\{(1, 0, -1), e_2, e_3\}$, $e_1 = 1(1, 0, -1) + 0e_2 + 1e_3$.

Este novo conxunto $\{(1, 0, -1), e_2, e_3\}$ tamén é base de $I\!R^3$.

En efecto, $r(1, 0, -1) + s(0, 1, 0) + t(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ s = 0 \\ -r + t = 0 \end{cases}$, polo que $\{(1, 0, -1), e_2, e_3\}$ é l. i.

Ademáis, $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x[(1, 0, -1) + e_3] + ye_2 + ze_3 = x(1, 0, -1) + ye_2 + (x + z)e_3$, $\forall\ (x, y, z) \in I\!R^3$, polo que $\{(1, 0, -1), e_2, e_3\}$ é tamén sistema de xeneradores (e polo tanto base) de $I\!R^3$.

De novo, como $(1, 0, 2) = (1, 0, -1) + 0(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$, podemos obter
$e_3 = (0, 0, 1) = \frac{1}{3}(1, 0, 2) - \frac{1}{3}(1, 0, -1)$ e polo tanto ó substituir e_3 por $(1, 0, 2)$ obter o conxunto $\{(1, 0, -1), e_2, (1, 0, 2)\}$ que é unha nova base de $I\!R^3$.

En efecto, ese conxunto é l.i. xa que $r(1, 0, -1) + s(0, 1, 0) + t(1, 0, 2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} r + t = 0 \\ s = 0 \\ -r + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $r = s = t = 0$; e ademáis é s.x. de $I\!R^3$ posto que, $\forall\ (x, y, z) \in I\!R^3$,

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x[(1, 0, -1) + e_3] + ye_2 + z[\frac{1}{3}(1, 0, 2) - \frac{1}{3}(1, 0, -1)] =$$

$$= x[\frac{2}{3}(1, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, 0, 2)] + ye_2 - \frac{1}{3}z(1, 0, -1) + \frac{1}{3}z(1, 0, 2) = [\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z](1, 0, -1) + ye_2 + \frac{1}{3}[x + z](1, 0, 2).$$

Polo tanto $\{(1, 0, -1), e_2, (1, 0, 2)\}$ é a base de $I\!R^3$ pedida.