Matemáticas I: Economía (AEEES)

TEMA 2: Aplicacións Lineais.

1. **Definicións.**
2. **Núcleo e imaxe dunha aplicación lineal.**
3. **Teorema da dimensión.**
4. **Matriz asociada a unha aplicación lineal. Matriz de cambio de base.**
5. **Rango dunha matriz.**

Introducción: Os conceptos básicos de Álxebra Lineal teñen un carácter formativo simbólico e son abundantes e interesantes as súas aplicacións na Economía Aplicada, Economía Financieira, Estatística, Econometría, Teoría Económica, Economía da Empresa. . .

En concreto a Álxebra Matricial ensínanos moi ben a abstraernos ó mundo dos símbolos para seren capaces, por exemplo, de representar cunha soa letra todo un cadro de datos (matriz), de operar con ela e de obter conclusións. A Álxebra Lineal permite, ademáis, cós seus importantes resultados, resolver, por exemplo, sistemas de ecuacións lineais utilizando técnicas matriciais, froito da identificación das matrices cás aplicacións lineais, que abordaremos neste tema.

A Álxebra, hoxe materia moi extensa na ciencia matemática, tivo a súa orixe máis formal nun traballo do matemático do século IX Mohammed ibn Mua Al-Kharizmi, onde aparece a primeira fórmula xeral para a resolución das ecuacións de primeiro e segundo grado. A orixe de este termo, Al-Chebr, responde moi ben ó contido real da propia ciencia: it Doctrina das operacións matemáticas consideradas formalmente dende o punto de vista global, con abstracción dos valores (números) concretos.

O método alxebraico está presente en toda a matemática e o seu campo de aplicacións aumentou notablemente na segunda metade do século XX. Dende hai xa varias décadas admítese, de modo natural, que a Álxebra Lineal é indispensable nos só para estudiantes de matemáticas, senón que é a parte da Álxebra máis útil na aplicación do razoamento matemático a outras áreas, por exemplo, programación lineal, análise de sistemas, estatística, . . . A Álxebra Lineal, e sobre todo a Álxebra Matricial, inclúese en áreas profesionais tan variadas como a Economía, Administración de Empresas, Socioloxía, Psicoloxía, Bioloxía, Demografía, . . . A Álxebra axuda a simplificar as expresións de algúns problemas e, en consecuencia, a resolvelos máis fácilmente e a deducir propiedades cualitativas de carácter xeral. Así, por exemplo, no campo da Economía, en todo tipo de modelos lineais multivariantes, requírese a solución de enormes sistemas de ecuacións lineais [onde o uso da Álxebra Lineal é fundamental, non só para resolvelos (nivel cuantitativo) senón para deducir propiedades de estabilidade, relacións interindustriais ... (nivel cualitativo)]. Un exemplo o constituen os modelos (estáticos ou dinámicos) input-output de Leontief. Outro exemplo o constitúen os modelos econométricos, onde a linguaxe das matrices simplifica considerablemente as expresións, as súas propiedades e solucións.

Dende o punto de vista das aplicacións económicas, como xa observamos no tema anterior, o espacio de bens pode considerarse como un conxunto con estructura matemática de espacio vectorial, e moitos teoremas aparentemente abstractos e de significación exclusivamente matemáica teñen o seu análogo en Economía Matemática. A relación existente, a traverso das aplicacións lineais, entre o concepto de espacio vectorial e a teoría de matrices permite o estudio simplificado de moitos modelos económicos. Polo tanto, o coñecemento de tal teoría é fundamental en economía.

1. Definicións.

Definición 1 *Sexan E e V dous espacios vectoriais.*
Unha aplicación $f\colon E \to V$ é unha **aplicación lineal** *se verifica:*

1. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$;

2. $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in E,\ \forall \alpha \in I\!R$.

Equivalentemente, $f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}),\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E,\ \forall \alpha, \beta \in I\!R$.

Proposición 1 *Se $f\colon E \to V$ é unha aplicación lineal, verifícase:*

1. $f(\theta_E) = \theta_V$; *xa que se* $\mathbf{x} \in E$, $f(\theta_E) = f(0\mathbf{x}) = 0f(\mathbf{x}) = \theta_V$.

2. $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in E$; *xa que se* $f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{x}) = f(\theta_E) = \theta_V$.

Exercicio 1 *Estudiar se son lineais ou non as seguintes aplicacións*

1. $f\colon I\!R^2 \to I\!R^3,\ f(a,b) = (a,0,b)$.
2. $g\colon I\!R^3 \to I\!R^2,\ g(a,b,c) = (2a+3c,-b)$.
3. $h\colon I\!R^2 \to I\!R^2,\ h(a,b) = (a-b,1)$.
4. $k\colon I\!R^n \to I\!R^n,\ k(v) = r \cdot v$, *con* $r \in I\!R$ *fixo.*
5. $p\colon I\!R^2 \to I\!R^3,\ p(a,b) = (a^2,b,b-2a)$.

Resolución: 1) f é unha aplicación lineal, posto que $\forall\ (a,b),(c,d) \in I\!R^2$ e $\forall\ r,s \in I\!R$ verifícase que:

$$f(r(a,b)+s(c,d)) = f(ra+sc, rb+sd) = (ra+sc, 0, rb+sd) = r(a,0,b)+s(c,0,d) = rf(a,b)+sf(c,d)$$

2) g é unha aplicación lineal, posto que $\forall\ (a,b,c),(d,e,f) \in I\!R^3$ e $\forall\ r,s \in I\!R$ verifícase:

$$g(r(a,b,c)+s(d,e,f)) = f(ra+sd, rb+se, rc+sf) = (2(ra+sd)+3(rc+sf), -(rb+se)) =$$

$$= r(2a+3c,-b)+s(2d+3f,-e) = rg(a,b,c)+sg(d,e,f)$$

3) Como $h(0,0) = (0,1) \neq (0,0)$, h non é unha aplicación lineal.

4) k é unha aplicación lineal, posto que $\forall\ u,v \in I\!R^n$ e $\forall\ s,t \in I\!R$ verifícase que:

$$k(s\cdot u+t\cdot v) = r\cdot(s\cdot u+t\cdot v) = r\cdot(s\cdot u)+r\cdot(t\cdot v) = s\cdot(r\cdot u)+t\cdot(r\cdot v) = s\cdot k(u)+t\cdot k(v)$$

5) p non é unha aplicación lineal posto que non verifica que a imaxe do oposto sexa o oposto da imaxe, xa que, por exemplo $p(-1,-1) = (1,-1,1) \neq -p(1,1) = -(1,1,-1) = (-1,-1,1)$.

2. Núcleo e imaxe dunha aplicación lineal.

Definición 2 *Sexa $f\colon E \to V$ unha aplicación lineal.*

1. $\ker f = \{\mathbf{x} \in E\ /\ f(\mathbf{x}) = \theta_V\} \subset E$ *denomínase* **núcleo de f**.

2. $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{y} \in V\ /\ \exists \mathbf{x} \in E, f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} \subset V$ *denomínase* **imaxe de f**.

Observar que sempre $\theta_E \in \ker f$ e $\theta_V \in \operatorname{Im} f$, xa que $f(\theta_E) = \theta_V$.

Exercicio 2 *Calcular o núcleo e a imaxe das aplicacións lineais do exercicio anterior.*

Resolución: 1) $\ker f = \{(a,b) \in I\!R^2 / f(a,b) = (0,0,0)\} = \{(0,0)\}$;

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in I\!R^3 / \exists (a,b) \in I\!R^2, f(a,b) = (x,y,z)\} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 / y = 0\},$$

posto que $\forall (x,0,z) \in I\!R^3,\ \exists (x,z) \in I\!R^2$ tal que $f(x,z) = (x,0,z)$. Ou ben directamente,

$$\operatorname{Im} f = \langle\{f(1,0), f(0,1)\}\rangle = \langle\{(1,0,0),(0,0,1)\}\rangle.$$

2) $\ker g = \{(a,b,c) \in I\!R^3 / g(a,b,c) = (0,0)\} = \{(a,b,c) \in I\!R^3 / b = 0, 3c = -2a\} = \langle\{(3,0,-2)\}\rangle$;

$$\operatorname{Im} g = \{(x,y) \in I\!R^2 / \exists (a,b,c) \in I\!R^3, g(a,b,c) = (x,y)\} = I\!R^2$$

posto que basta tomar, por exemplo, $b = -y,\ a = \frac{1}{2}x,\ c = 0$ para que $g(a,b,c) = g(\frac{1}{2}x, -y, 0) = (x,y)$. Doutro modo,

$$\operatorname{Im} g = \langle\{g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\}\rangle = \langle\{(2,0),(0,-1),(3,0)\}\rangle = \langle\{(2,0),(0,-1)\}\rangle = I\!R^2.$$

4) $$\ker k = \{\mathbf{u} \in I\!R^n / \ k(\mathbf{u}) = \theta_{R^n}\} = \left\{ \begin{array}{lll} I\!R^n & \text{se} & r = 0 \\ \{\theta_{R^n}\} & \text{se} & r \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{Im} k = \{\mathbf{v} \in I\!R^n / \ \exists \ \mathbf{u} \in I\!R^n, k(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\} = \left\{ \begin{array}{lll} I\!R^n & \text{se} & r \neq 0 \\ \{\theta_{R^n}\} & \text{se} & r = 0 \end{array} \right.$$

posto que se $r \neq 0$, dado $\mathbf{v} \in I\!R^n$ basta tomar un $\mathbf{u} = \frac{1}{r}\mathbf{v}$ para que $k(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

Proposición 2 *Se $f\colon E \to V$ é unha aplicación lineal,* $\ker f$ *é un subespacio vectorial de E e* $\operatorname{Im} f$ *é un subespacio vectorial de V. Ademáis:*
a) f é inxectiva $\Longleftrightarrow \ker f = \{\theta_E\} \Longleftrightarrow \dim \ker f = 0$.
b) f é sobrexectiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = V \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Exercicio 3 *Estudiar se son inxectivas, sobrexectivas e/ou bixectivas as aplicacións lineais dos exercicios anteriores.*

Resolución: f é inxectiva, posto que $\ker f = \{(0,0)\}$;

pero non é sobrexectiva (nin bixectiva) posto que $\operatorname{Im} f \neq I\!R^3$.

g non é inxectiva (nin bixectiva) posto que $\ker g \neq \{(0,0,0)\}$; pero si é sobrexectiva, pois $\operatorname{Im} g = I\!R^2$.

k é bixectiva (inxectiva e sobrexectiva) se $r \neq 0$, pois neste caso $\ker k = \theta_{R^n}$ e $\operatorname{Im} k = I\!R^n$;

pero non é ningunha das tres cousas se $r = 0$, xa que neste caso $\ker k = I\!R^n \neq \theta_{R^n}$ e $\operatorname{Im} k = \theta_{R^n} \neq I\!R^n$.

Proposición 3 *Se $f\colon E \to V$ é unha aplicación lineal verifícase:*

1. *Se f é inxectiva e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é lineal. indep., entón $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é linealmente independente.*

2. *Se f é sobrexectiva e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é xenerador de E, entón $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é xenerador de V.*

3. *Se f é bixectiva e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é base de E, entón $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é base de V.*

Demostración: A demostración dos apartados 1) e 2) a tendes detallada no apéndice. Vexamos agora só o apartado 3.

3. Como vimos no tema anterior, $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é base de V se é sistema de xeneradores de V e linealmente independente.

Agora ben, por ser f bixectiva é sobrexectiva, e por ser $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ base de E é sistema de xeneradores de E; polo tanto, aplicando o apartado anterior, xa temos que $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é xenerador de V.

Por outra parte, por ser f bixectiva é inxectiva, e por ser $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ base de E é linealmente independente; polo tanto, aplicando o apartado 1) xa se obtén que $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é linealmente independente; có que remata a proba.

3. Teorema da dimensión.

Teorema 1 (da dimensión) *Sexan E e V dous espacios vectorias de dimensión finita.*

Se $f\colon E \to V$ é unha aplicación lineal, verifícase que $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

Corolario 1 *Se $f\colon E \to V$ é unha aplicación lineal, verifícase:*

1. *f bixectiva* $\Rightarrow \dim E = \dim V$.

2. $\dim E < \dim V \Rightarrow f$ *non pode ser sobrexectiva.*

3. $\dim E > \dim V \Rightarrow f$ *non pode ser inxectiva.*

Observación 1 *Os recíprocos non son certos. Para velo basta considerar a aplicación lineal $f\colon I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$, $f(\mathbf{x}) = \theta$, $\forall \mathbf{x} \in I\!R^n$.*

Definición 3 *Dous espacios vectoriais E e V son* **isomorfos** *se existe unha aplicación lineal $f\colon E \to V$ bixectiva.*

Observación 2 *Unha aplicación lineal bixectiva denomínase* **isomorfismo**.

Corolario 2 *E e V son isomorfos* $\Leftrightarrow \dim E = \dim V$.

A necesidade é inmediata (cor 1.1). Para ver a suficiencia, basta ter en conta que se $\dim E = n = \dim V$, $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é unha base de E e $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é unha base de V, a aplicación $f\colon E \longrightarrow V$, $f(\mathbf{x}) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V$, é un isomorfismo.

Corolario 3 *Se* $\dim E = n$, *E é isomorfo a $I\!R^n$.*

Para velo basta ter en conta que se $\dim E = n$ e $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é unha base de E, a aplicación $f\colon E \longrightarrow I\!R^n$, $f(\mathbf{x}) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, é un isomorfismo.

Proposición 4 *Unha aplicación lineal $f\colon E \longrightarrow V$ queda determinada (de modo único) coñecendo as imáxenes dos elementos dunha base de E.*

Demostración: Sexa $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ unha base de E. Dado que cada $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, e que f é lineal, $f(\mathbf{x}) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$.

Corolario 4 *Sexa $f\colon E \to V$ unha aplicación lineal.*
Se $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é unha base de E, $\quad \operatorname{Im} f = \langle \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\} \rangle$.

Exercicio 4 *Determinar a aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabendo que:*

$$f(1,0,0) = (3,-1), \quad f(0,-1,0) = (0,1) \quad e \quad f(0,0,2) = (1,1).$$

Resolución: Para determinar f falta saber calcular a imaxe dun elemento arbitrario $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Para elo temos as imaxes dos elementos do conxunto $\{(1,0,0),(0,-1,0),(0,0,2)\}$, que é unha base de $\mathbb{R}^3$, e polo tanto calquera elemento de $\mathbb{R}^3$ o podemos obter como combinación lineal deles; así

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + (-y)(0,-1,0) + \frac{z}{2}(0,0,2)$$

e polo tanto, como f ten que ser lineal,

$$f(x,y,z) = xf(1,0,0)+(-y)f(0,-1,0)+\frac{z}{2}f(0,0,2) = x(3,-1)+(-y)(0,1)+\frac{z}{2}(1,1) = (3x+\frac{z}{2}, -x-y+\frac{z}{2})$$

4. Matriz asociada a unha aplicación lineal. Matriz de cambio de base.

Definición 4 *Sexan $f\colon E \to V$ unha aplicación lineal, $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ unha base de E ($\dim E = n$) e $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ unha base de V ($\dim V = m$).*

Denomínase **matriz asociada a f respecto ás bases B_1 e B_2** *á matriz, $m \times n$,*

$$Mf_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n},$$

onde a columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ *son as coordenadas de $f(e_j)$ na base B_2, para $j = 1, \ldots, n$.*

Observación 3 *a) Esta matriz é a* única *matriz que verifica:*

$$f(\mathbf{x})_{B_2} = Mf_{B_1B_2} \cdot \mathbf{x}_{B_1}, \ \forall \mathbf{x} \in E.$$

Mediante $Mf_{B_1B_2}$ obtéñense as coordenadas de $f(\mathbf{x})$, respecto á base B_2, coñecidas as coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto da base B_1.

b) Con Mf indicarase a matriz asociada a f respecto ás bases canónicas en ámbolos dous espacios.

Definición 5 *Denomínase* **aplicación lineal definida por** A, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, *á aplicación lineal* $f\colon I\!R^n \to I\!R^m$ *dada por* $f(\mathbf{x})_{C_2} = A \cdot \mathbf{x}_{C_1}$, *sendo* C_1 *e* C_2 *as bases canónicas de* $I\!R^n$ *e* $I\!R^m$, *respectivamente.*

Observar que a aplicación lineal $f\colon I\!R^n \to I\!R^m$ definida por $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ é a única aplicación lineal de $I\!R^n$ en $I\!R^m$ que ten por matriz asociada, Mf, respecto ás bases canónicas, á matriz A.

Exercicio 5 *a) Determinar* Mf, *para* $f\colon I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$, $f(x,y) = (x, x+y, 2x-y)$.

b) Determinar a aplicación lineal definida por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Determinar a matriz asociada a $id\colon I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$, *respecto a*

$B_1 = \{(1,-1,1),(0,-1,0),(0,0,1)\}$ *e* $B_2 = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

Resolución: a) $Mf = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ posto que $f(1,0) = (1,1,2) \underset{C}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $f(0,1) = (0,1,-1) \underset{C}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$, definirá unha aplicación $f\colon I\!R^4 \to I\!R^3$ que verificará

$$f(x,y,z,t) \underset{C}{=} A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y-3t \\ 2y-z \\ -y+t \end{pmatrix}$$

polo tanto $f(x,y,z,t) = (2x+y-3t, 2y-z, -y+t)$, $\forall\ (x,y,z,t) \in I\!R^4$.

c) Para calcular esa $MId_{B_1B_2}$ necesitamos as coordenadas na base B_2 dos vectores $(1,-1,1)$, $(0,-1,0)$ e $(0,0,1)$, posto que, neste caso, as súas imaxes son eles mesmos.

$$(1,-1,1) = r(1,1,1) + s(1,0,1) + t(1,1,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r+s+t=1 \\ r+t=-1 \\ r+s=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ s=2 \\ r=-1 \end{array}\right. \Rightarrow (1,-1,1)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(0,-1,0) = a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a+c=-1 \\ a+b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=0 \\ b=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow (0,-1,0)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(0,0,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \delta(1,1,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\delta=0 \\ \alpha+\delta=0 \\ \alpha+\beta=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta=-1 \\ \beta=0 \\ \alpha=1 \end{array}\right. \Rightarrow (0,0,1)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto $M_{B_1B_2} = MId_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Definición 6 *Sexan B_1 e B_2 dúas bases dun espacio vectorial E. Denomínase* **matriz de cambio de base** *de B_1 a B_2, e denótase $M_{B_1 B_2}$, á matriz asociada á aplicación identidade, respecto a B_1 no espacio de partida e a B_2 no de chegada.*

Nótese que a matriz de cambio de base de B_1 a B_2 permite calcular as coodenadas dun vector, $\mathbf{v}$, na base B_2 coñecidas as súas coodenadas na base B_1, xa que

$$\mathbf{v}_{B_2} = id(\mathbf{v})_{B_2} = M_{B_1 B_2} \cdot \mathbf{v}_{B_1}$$

5. Rango dunha matriz.

Definición 7 *Sexa $f\colon I\!R^n \to I\!R^m$ a aplicación lineal definida por $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.*

Denomínase **rango de** *f ou* **rango de** *A, e denótase $rg(f)$ ou $rg(A)$, á dimensión do subespacio imaxe de f.*

Observación 4 *Posto que as columnas de A son as coordenadas de*

$f(1,0,\cdots,0),\cdots,f(0,\cdots,0,1)$ na base canónica de $I\!R^m$ e

$\operatorname{Im} f = \langle\{f(1,0,\cdots,0),\cdots,f(0,\cdots,0,1)\}\rangle$, o rango de f, ou de A, indica o máximo número de vectores columna de A que son linealmente independentes.

En xeral, o rango de f, ou de A, coincide co número máximo de columnas linealmente independentes de calquera matriz asociada a f.

Proposición 5 *Sexan $f,g\colon E \to V$, $h\colon V \to W$ aplicacións lineais; $\alpha,\beta \in I\!R$; B_1, B_2, B_3 bases de E, V e W, respectivamente; $\dim E = n$, $\dim V = p$, $\dim W = m$.*

Verifícase:

a) $\alpha f + \beta g\colon E \to V$, $\quad (\alpha f+\beta g)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})$, $\quad$ é unha aplicación lineal.

Ademáis, $\quad M(\alpha f+\beta g)_{B_1B_2} = \alpha Mf_{B_1B_2} + \beta Mg_{B_1B_2} \in \mathcal{M}_{p\times n}$.

b) $h\circ f\colon E \to W$, $\quad (h\circ f)(\mathbf{x}) = h(f(\mathbf{x}))$, $\quad$ é unha aplicación lineal.

Ademáis, a matriz asociada a $h\circ f$ respecto ás bases B_1 e B_3 é

$$M(h\circ f)_{B_1B_3} = Mh_{B_2B_3} \cdot Mf_{B_1B_2} \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

Pois, se $\mathbf{x} \in E$, $(h\circ f)(\mathbf{x})_{B_3} = h(f(\mathbf{x}))_{B_3} = Mh_{B_2B_3} \cdot f(\mathbf{x})_{B_2} = Mh_{B_2B_3} \cdot Mf_{B_1B_2} \cdot \mathbf{x}_{B_1}$.

c) Se $f\colon E \to V$ é un isomorfismo, existe $f^{-1}\colon V \to E$ aplicación lineal tal que

$$f^{-1} \circ f = id_E, \ f \circ f^{-1} = id_V.$$

Ademáis

$$Mf^{-1}_{B_2B_1} = \left(Mf_{B_1B_2}\right)^{-1}.$$

Nótese que a matriz $Mf_{B_1B_2} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ($\dim E = n = \dim V = p$), asociada a f respecto ás bases B_1 de E e B_2 de V, é inversible e a súa inversa é a matriz asociada a f^{-1} respecto ás bases B_2 e B_1.

Proposición 6 *a) Sexan $f\colon I\!R^n \to I\!R^n$ unha aplicación lineal e $Mf_{B_1B_2}$ a matriz asociada a f respecto ás bases B_1 e B_2 de $I\!R^n$.*

f é un isomorfismo $\Leftrightarrow Mf_{B_1B_2}$ é inversible $\Leftrightarrow rg(Mf_{B_1B_2}) = n \Leftrightarrow \det(Mf_{B_1B_2}) \neq 0$.

b) Se B_1 e B_2 son dúas bases dun espacio vectorial V, verifícase

$$M_{B_1B_2} = \left(M_{B_2B_1}\right)^{-1}$$

Exercicio 6 *Dadas as aplicacións lineais:*
$f\colon I\!R^2 \to I\!R^3, f(1,0) = (1,1,0), f(0,1) = (0,0,1)$.
$\psi\colon I\!R^3 \to I\!R^3, \psi(x,y,z) = (x, x-y+z, 2x+z)$.
a) Determina a aplicación f e, se é posible, $\psi \circ f$ e $f \circ \psi$.
b) Calcula as matrices asociadas ás aplicacións f e ψ, respecto das bases canónicas.
c) Calcula os subespacios núcleo e imaxe de f e de ψ e indica as súas dimensións. Razoa se son inxectivas, sobrexectivas e/ou bixectivas e obtén o seu rango.
d) Estudia se son inversibles e, en caso afirmativo, determina a súa inversa.

Resolución: a) Como $f\colon I\!R^2 \to I\!R^3$ é lineal, $\forall\ (x,y) \in I\!R^2$,

$$f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1) = x(1,1,0) + y(0,0,1) = (x,x,y).$$

$$\psi \circ f\colon I\!R^2 \to I\!R^3, \quad \psi \circ f(x,y) = \psi(f(x,y)) = \psi(x,x,y) = (x, x-x+y, 2x+y) = (x,y,2x+y).$$

$f \circ \psi$ non se pode definir posto que $\psi(x,y,z) \in I\!R^3$ e f está definida en $I\!R^2$.

b) Como $f(1,0) = (1,1,0) \underset{C}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f(0,1) = (0,0,1) \underset{C}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, obtense que $Mf = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Análogamente, $M\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pois $\psi(1,0,0) \underset{C}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\psi(0,1,0) \underset{C}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\psi(0,0,1) \underset{C}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\ker f = \{(x,y) \in I\!R^2 / f(x,y) = (0,0,0)\} = \{(0,0)\}$.

$\operatorname{Im} f = \{(a,b,c) \in I\!R^3 / \exists (x,y) \in I\!R^2, f(x,y) = (a,b,c)\} = \{(a,b,c) \in I\!R^3 / a = b\} = \langle \{(1,1,0),(0,0,1)\} \rangle$.

$$\ker \psi = \{(x,y,z) \in I\!R^3 / \psi(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(0,0,0)\}.$$

$\operatorname{Im} \psi = I\!R^3$, posto que $\dim I\!R^3 = \dim \ker \psi + \dim \operatorname{Im} \psi$ e $\dim \ker \psi = 0$.

Polo tanto f é inxectiva ($\dim \ker f = 0$), pero non é sobrexectiva (nin bixectiva) porque $\operatorname{Im} f \neq I\!R^3$.

ψ é bixectiva posto que é inxectiva ($\dim \ker \psi = 0$), e sobrexectiva ($\operatorname{Im} \psi = I\!R^3$).

$\operatorname{rango} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$ e $\operatorname{rango} \psi = \dim \operatorname{Im} \psi = 3$.

d) f non é inversible porque non é bixectiva.

ψ é inversible por ser bixectiva, e a súa inversa é

$$\psi^{-1} \colon I\!R^3 \to I\!R^3, \psi^{-1}(a,b,c) = (a, c-b-a, c-2a)$$

xa que $\psi^{-1}(a,b,c) = (x,y,z) \Leftrightarrow \psi(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ x - y + z = b \\ 2x + z = c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ z = c - 2x = c - 2a \\ y = x + z - b = a + c - 2a - b = c - b - a \end{array} \right.$$

6. Apéndice: Exercicios resoltos.

1. Calcula o núcleo e a imaxe da aplicación lineal $f \colon I\!R^3 \to I\!R^2, f(x,y,z) = (x+z, y)$.

   Solución: $\ker f = \{(x,y,z) \in I\!R^3, f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in I\!R^3, x+z = 0, y = 0\} =$

   $= \{(x,y,z) \in I\!R^3, z = -x, y = 0\} = \{(x,0,-x), x \in I\!R\} = \{x(1,0,-1), x \in I\!R\} = \langle \{(1,0,-1)\} \rangle$.

   $\operatorname{Im} f = \{(a,b) \in I\!R^2; \exists (x,y,z) \in I\!R^3, f(x,y,z) = (a,b)\} = I\!R^2$, pois basta tomar, por exemplo, $(x,y,z) = (a,b,0)$ para que se verifique que $f(x,y,z) = (a,b)$.

2. Sexa $f \colon I\!R^2 \to I\!R^3, f(x,y) = (x, x+y, 2x-y)$. calcula:

   a) A matriz asociada a f respecto ás bases canónicas.

   b) A matriz asociada a f respecto ás bases $B = \{(1,0),(1,1)\}$ de $I\!R^2$ e $B' = \{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ de $I\!R^3$.

Solución: a) $Mf_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $f(1,0) = (1,1,2) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha + \gamma \\ 1 = \alpha + \beta \\ 2 = \gamma \end{array} \right. \Rightarrow f(1,0)_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$f(1,1) = (1,2,1) = 2(0,1,0) + (1,0,1) \Rightarrow f(1,1)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Polo tanto $Mf_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Consideramos en $\mathbb{R}^3$ a base canónica e a base $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

   a) Calcula a matriz cambio de base de B a C.

   b) Calcula a matriz cambio de base de C a B e as coordenadas de $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ na base B.

   c) Se f é a aplicación lineal definida pola matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a matriz asociada a f respecto á base B (B e B).

Solución: a) $M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $M_{CB} = (M_{BC})^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_B = M_{CB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$.

c) $Mf_{BB} = M_{CB}AM_{BC} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Cuestións Propostas.

1. ¿Cales das seguintes aplicacións son lineais? $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$; $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g(x,y,z) = (x^2, y+z)$; $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, h(x) = (x, 2x)$; $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, k(x,y) = (x, x+y, 1)$.

   a) Só h. b) Todas son lineais. c) f e h. d) f, h e k.

2. Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ unha aplicación lineal tal que $f(-1,1) = (0,2)$. ¿Cal das seguintes igualdades é **FALSA**?

   a) $f(0,0) = (0,0)$. b) $f(1,-1) = (2,0)$. c) $f(-1/2, 1/2) = (0,1)$. d) $f(-2,2) = (0,4)$.

3. Sexa $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ unha aplicación lineal tal que $f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1) = (0,1)$, ¿cal das seguintes afirmacións é correcta?

   a) $f(x,y,z) = (0,1), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. b) $f(x,y,z) = (0, x+y+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   c) $\dim(\ker f) = 1$. d) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

4. Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ unha aplicación tal que $f(0,0) = (1,2,3)$. Entón pódese asegurar que:

   a) f é constante. b) f non é lineal. c) $(1,2,3) \in \ker f$. d) ningunha das respostas anteriores é correcta.

5. Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é unha aplicación lineal tal que $f(1,0,0) = (-1,1)$ e $f(0,1,0) = (0,2)$, ¿pódese calcular $f(1,1,0)$?

   a) Non, pois sería preciso coñecer as imaxes dos vectores da base canónica. b) Si, $f(1,1,0) = (-1,3)$.

   c) Non, pois $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ non é unha base de $\mathbb{R}^3$. d) Si, pois $\{(-1,1),(0,2)\}$ é unha base de $\mathbb{R}^2$.

6. Sexan $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ unha aplicación lineal e $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, entón $< f(S) >$ é:

   a) un subespacio de $\mathbb{R}^3$. b) un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
   c) un conxunto de vectores linealmente independente. d) un sistema de xeneradores de $\mathbb{R}^4$.

7. Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é unha aplicación lineal, o conxunto $\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}$ é:

   a) un sistema de xeneradores de $\operatorname{Im} f$. b) un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
   c) un conxunto de vectores linealmente independente. d) un sistema de xeneradores de $\mathbb{R}^4$.

8. Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é a aplicación lineal definida por $f(x,y,z) = (x-y, y-x)$, entón:

   a) $(1,1,0) \in \ker f$. b) $(-2,2,0) \in \operatorname{Im} f$. c) $\ker f = \langle\{(1,1)\}\rangle$. d) $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

9. Sexa $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ unha aplicación lineal. ¿Cal das seguintes afirmacións é **FALSA**?

   a) $\operatorname{Im} f$ é un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. b) f pode ser inxectiva.
   c) f pode ser sobrexectiva. d) $\operatorname{Im} f$ pode ter dimensión un.

10. ¿Cal dos seguintes espacios é isomorfo a $\mathbb{R}^3$?

    a) $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. b) $P_3[x]$. c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, x = y\}$. d) $\langle\{1, x^2, x^4\}\rangle$.

11. Se $f\colon V \to V'$ é unha aplicación lineal, $\dim V = n$ e $\dim V' = m$. Para que f sexa isomorfismo:

    a) é necesario que $n = m$. b) é suficiente que $n = m$.
    c) é necesario que $n \leq m$. d) é necesario e suficiente que $n = m$.

12. Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é unha aplicación lineal, calquera matriz asociada a f é de orde:

    a) 3×2. b) 2×3. c) 3×3. d) 2×2.

13. A matriz asociada á aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y, y-z)$, respecto á base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a base canónica de $\mathbb{R}^2$ é:

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Se $Mf_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ é a matriz asociada a f respecto ás bases B e B' de $\mathbb{R}^2$ e as coordenadas do vector v na base B son $(1,0)$ pódese asegurar que:

    a) as coordenadas de $f(v)$ na base B' son $(1,3)$. b) $f(v) = (1,3)$.
    c) as coordenadas de $f(v)$ na base B' son $(1,2)$. d) ningunha das respostas anteriores é correcta.

15. Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ unha aplicación lineal dada por $f(x,y) = (y,x)$. A matriz, Mf_{BB}, asociada a f respecto á base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ é:

    a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Se $f\colon V \to V$ é unha aplicación lineal non bixectiva con matriz asociada A, podemos asegurar que:
   a) A non é cadrada. b) A é cadrada e $\det A \neq 0$.
   c) A é cadrada e $\det A = 0$. d) ningunha das respostas anteriores é correcta.

17. Dadas en $\mathbb{R}^2$ as bases $B = \{(0,-1),(2,0)\}$ e a canónica, C, a matriz cambio de base de B a C, M_{BC}, é:
   a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz asociada a unha aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto ás bases canónicas, ¿cal das seguintes afirmacións é **FALSA**?
   a) $\{(-1,1,0),(2,-1,1),(1,0,1)\}$ é un sistema de xeneradores de $\operatorname{Im} f$. b) $\operatorname{rango} A = \dim(\operatorname{Im} f)$.
   c) $\{(-1,1,0),(2,-1,1),(1,0,1)\}$ é unha base de $\operatorname{Im} f$. d) $\dim(\ker f) = 3 - \operatorname{rango} A$.

19. Sexa $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ unha aplicación lineal con matriz asociada A. Se $\operatorname{rango}(A) = 2$, pódese asegurar que:
   a) f é inxectiva pero non sobrexectiva. b) f é sobrexectiva pero non inxectiva.
   c) f é un isomorfismo. d) f non é inxectiva nin sobrexectiva.

20. Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é unha aplicación lineal, pódese asegurar que:
   a) f é inxectiva. b) $\operatorname{rango} f = 2$. c) $\dim \ker f \geq 1$. d) f non é sobrexectiva.

8. Exercicios Propostos.

1. Decide cales das seguintes aplicacións son lineais:

   a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x,y,z)$. b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y) = (3,1,1)$.
   c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (2x+y, z+3)$. d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y) = (x^2, x-y, x)$.
   e) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x+z, y+z, 2z)$.

2. Dá, se é posible, unha aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que teña por núcleo só ós vectores $(0,0)$ e $(1,0)$.

3. Dadas as aplicacións lineais:

   $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, g(x,y,z) = (2x+y, x-y-z, x+2y-z, 3y-2z)$;

   $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, h(1,0,0) = (1,1,0,1), h(0,1,0) = (1,0,-1,1), h(1,1,1) = (1,1,1,2)$;

   $$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad & \phi(1,0,0,0) = (-1,2,1,0), \quad \phi(0,1,0,0) = (0,0,3,2), \\ & \phi(0,0,1,-1) = (1,2,1,3), \quad \phi(0,0,0,-1) = (1,1,0,-2). \end{aligned}$$

   a) Determina as aplicacións h e ϕ.

   b) Calcula os subespacios núcleo e imaxe para cada aplicación e indica as súas dimensións. Razoa se son inxectivas, sobrexectivas e/ou bixectivas.

   c) Calcula as matrices asociadas ás aplicacións respecto das bases canónicas e obtén o seu rango.

4. Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a aplicación lineal definida por $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, contesta razoadamente ás seguintes preguntas.

   a) Determina m e n. b) ¿É f sobrexectiva? ¿É inxectiva? ¿É bixectiva?

   c) Calcula a expresión xeral de f.

5. Pon un exemplo dunha aplicación lineal:

   a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que verifique que $\{f(1,0), f(0,1)\}$ sexa lineal. dependente. ¿Pode ser f inxectiva?
   b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}$ sexa lineal. indep. ¿Pode ser f sobrexectiva?

6. Define unha aplicación lineal:

   a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que o seu núcleo esté xenerado polos vectores $(1,2,1)$ e $(0,1,1)$.

   b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que a súa imaxe esté xenerada polos vectores $(1,2,0,-4)$ e $(2,0,-1,1)$.

   c) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que o seu núcleo esté xenerado polos vectores $(-1,0,0,1)$ e $(1,3,2,0)$ e a súa imaxe esté xenerada polos vectores $(1,1,1)$ e $(0,-2,0)$.

7. Sexan $B_1 = \{(1,-1,1), (-1,1,0), (0,-1,1)\}$ e $B_2 = \{(1,-1,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) Calcula as matrices M_{B_1C}, M_{CB_2} e $M_{B_1B_2}$ sendo C a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) Sexa $\mathbf{v}$ un vector con coordenadas $2, 1$ e 3 na base B_1. Determina as súas coordenadas na base B_2 e na base canónica.

   c) Obtén as coordenadas na base B_2 do vector de coordenadas x, y e z na base canónica.

8. Sexan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ as matrices asociadas ás aplicacións lineais f, g e h, respectivamente.

   Calcula, se é posible, $g \circ f(1,-1,0)$, $f \circ g(-2,2)$, $h^{-1}(1,1,2)$, $h \circ f$ e $f \circ h$.

9. Tres empresas A, B e C (tamén numeradas 1, 2 e 3) comparten este ano o mercado dun certo ben. A empresa A ten o 20 por cento do mercado, B ten o 60 por cento e C o 20 por cento.

   Ó longo do ano ocorren os seguintes cambeos:

   A conserva o 85 por cento dos seus clientes, cede a B o 5 por cento, e a C o 10 por cento.

   B conserva o 55 por cento dos seus clientes, cede a A o 10 por cento, e a C o 35 por cento.

   C conserva o 85 por cento dos seus clientes, cede a A o 10 por cento, e a B o 5 por cento.

   O vector de *cuotas de mercado* (vector columna de compoñentes non negativas e que suman 1) é $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ e a *matriz de transición* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}55 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.

   Nótese que t_{ij} é a fracción de clientes de j que se fan clientes de i no seguinte período.

   Calcula o vector $\mathbf{T} \cdot \mathbf{s}$, proba que é tamén un vector de cuotas de mercado e da unha interpretación del. ¿Como se interpretan $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{s})$, $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{T} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{s})), \cdots$?

9. Apéndice.

Proposición 7 *Se $f\colon E \to V$ é unha aplicación lineal verifícase:*

1. *Se f é inxectiva e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é lineal. indep., entón $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é linealmente independente.*
2. *Se f é sobrexectiva e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é xenerador de E, entón $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é xenerador de V.*
3. *Se f é bixectiva e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é base de E, entón $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é base de V.*

Demostración: 1. Para ver que $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é linealmente independente debemos probar que o único xeito de obter o θ_V como combinación lineal deses vectores é a trivial.

Para elo, tomemos $r_1, \cdots, r_n \in I\!R$ tales que $r_1 f(\mathbf{u}_1) + r_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + r_n f(\mathbf{u}_n) = \theta_V$.

Agora ben, como f é lineal, $r_1 f(\mathbf{u}_1) + r_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + r_n f(\mathbf{u}_n) = f(r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + \cdots + r_n\mathbf{u}_n)$;

e como f é inxectiva, o único vector que ten como imaxe θ_V é θ_E; $r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + \cdots + r_n\mathbf{u}_n = \theta_E$.

Por último, como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é linealmente independente, a única combinación lineal deles que dá o vector nulo é a trivial; polo tanto $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$. (c.q.d.)

2. Teremos que ver que $\forall\, \mathbf{v} \in V$ existen $r_1, \cdots, r_n \in I\!R$ tales que $r_1 f(\mathbf{u}_1) + r_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + r_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}$.

Agora ben, por ser f sobrexectiva, dado $\mathbf{v} \in V$ existe $\mathbf{u} \in E$ tal que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

Ademáis, como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é xenerador de E, para ese $\mathbf{u} \in E$ existirán $r_1, \cdots, r_n \in I\!R$ tales que

$$r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + \cdots + r_n\mathbf{u}_n = \mathbf{u}.$$

Por último, por ser f lineal, temos que

$\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) = f(r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + \cdots + r_n\mathbf{u}_n) = r_1 f(\mathbf{u}_1) + r_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + r_n f(\mathbf{u}_n)$. (c.q.d.)

3. Como vimos no tema anterior, $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é base de V se é sistema de xeneradores de V e linealmente independente.

Agora ben, por ser f bixectiva é sobrexectiva, e por ser $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ base de E é sistema de xeneradores de E; polo tanto, aplicando o apartado anterior, xa temos que $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é xenerador de V.

Por outra parte, por ser f bixectiva é inxectiva, e por ser $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ base de E é linealmente independente; polo tanto, aplicando o apartado 1) xa se obtén que $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \cdots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é linealmente independente; có que remata a proba.